Office - Peters Hall

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.— postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Goldmark 9.—, im Ausland $ 2.60. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.35, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

No. 5. Ausgegeben am 1. März 1927. No. 729. Printed in Germany. 28. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

W. Hardmeier, Anomale Zerstreuung von α-Strahlen. S. 181—195.

J. Dejmek, Zur Theorie der Wirbel. S. 196—198.

L. Prandtl, Berichtigung zu Band II des „Handbuchs der Physik". S. 199.

H. Sack, Über die Dielektrizitätskonstanten von Elektrolytlösungen bei geringen Konzentrationen. S. 199—210.

J. Würschmidt, Anfangspermeabilität und Maximalpermeabilität. S. 210—211.

H. Maurer, Die Stromrichtung in Blitzen. S. 211—212.

Besprechungen:

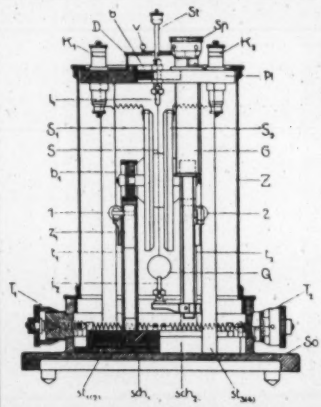
H. Ambronn und A. Frey, Das Polarisationsmikroskop, seine Anwendung in der Kolloidforschung und in der Färberei. S. 212.

Personalien. S. 212.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Phys.-mech. Institut von Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,

München.



Saiten-Elektrometer

nach Lutz-Edelmann (neue Form).

C. W. Lutz, Physik. Zeitschrift, 24. Jahrgang. 1923. Seite 166—170.

Katalog 30, Spezialliste No. 32 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 5. 1. März 1927. Redaktionsschluß für No. 7 am 10. März 1927. 28. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

W. Hardmeier, Anomale Zerstreuung von α-Strahlen. S. 181.

Joh. Dejmek, Zur Theorie der Wirbel. S. 196.

L. Prandtl, Berichtigung zu Band 2 des „Handbuchs der Physik". S. 199.

H. Sack, Über die Dielektrizitätskonstanten von Elektrolytlösungen bei geringen Konzentrationen. S. 199.

J. Würschmidt, Anfangspermeabilität und Maximalpermeabilität. S. 210.

H. Maurer, Die Stromrichtung in Blitzen. S. 211.

Besprechungen:

H. Ambronn u. A. Frey, Das Polarisationsmikroskop, seine Anwendung in der Kolloidforschung und in der Färberei. S. 212.

Personalien. S. 212.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Anomale Zerstreuung von α-Strahlen.

Von W. Hardmeier.

In den letzten Jahren lenkten verschiedene experimentelle Untersuchungen über Abweichungen von der zuerst von Rutherford und seinen Mitarbeitern bestimmten Zerstreuung der α-Strahlen beim Durchgang durch Materie das Interesse auf sich. Es soll hier versucht werden, darüber Aufschluß zu erhalten, inwieweit es möglich ist, jene Abweichungen im Rahmen der bisher anerkannten Voraussetzungen zu deuten.

1. Passiert ein Bündel von α-Strahlen (d. h. doppelt positiv geladener Heliumatome mit Geschwindigkeiten bis 20000 km/sec) eine dünne Schicht Materie, so zeigt sich bekanntlich die interessante Tatsache, daß weitaus der größte Teil dieser materiellen Teilchen bei geringer Geschwindigkeitsverminderung kaum abgelenkt wird. Die α-Strahlen durchdringen also in ihrer Mehrzahl selbst das Innere der Atome ohne wesentlich beeinflußt zu werden. Daneben zeigen sich freilich in allen Richtungen einzelne sehr stark abgelenkte Teilchen. Die Wahrscheinlichkeit für eine solche starke Ablenkung als Resultat mehrerer im gleichen Sinne aufeinanderfolgender kleinerer ist viel zu klein zur Deutung des beobachteten Effektes. Wir müssen uns vielmehr eine solche starke Ablenkung durch einen einzigen Vorgang entstanden denken, worauf ja auch die bei α-Strahlbahnen in Luft oft beobachteten Knicke mit nachheriger gradliniger Fortsetzung weisen.

Will man aber diese starken Richtungsänderungen durch eine einmalige Wirkung eines Atoms auf das sehr schnelle α-Teilchen erklären, so muß diese Wirkung eine derartig intensive sein, wie sie, wenn wir bloß elektrostatische Kräfte annehmen, nur bei sehr kleinen Distanzen (10^{-12} cm) zwischen den in Betracht kommenden Ladungen auftreten können. Diese Überlegungen hauptsächlich führten ja zu der heutigen Auffassung über die Konzentrierung der Masse eines Atoms in einem gegenüber der Größe desselben fast verschwindend kleinen Bereich, dem Kern.

Quantitative Schlüsse können aus solchen Beobachtungen nur gezogen werden bei einer genauen Berechnung der Wahrscheinlichkeit dieser starken Ablenkungen unter Annahme einer bestimmten Kraftwirkung zwischen α-Teilchen und Kern. Es gelang Rutherford (1) und seinen Mitarbeitern (2) unter Annahme einer positiven Ladung des Kernes ihre experimentellen Resultate darzustellen, ohne weitere Kräfte als die elektrostatischen vorauszusetzen. Darüber hinaus gelangten sie zur Messung dieser jedem Element eigenen Ladung des Kerns, in voller Übereinstimmung mit anderweitigen, zum Beispiel aus Röntgenspektren gewonnenen Resultaten (3).

2. Die vorliegenden neueren Messungen von Bieler (4) und Rutherford und Chadwick (5) zeigen, daß bei den Leichtmetallen Aluminium und Magnesium als zerstreuende Substanz, unter einem bestimmten Winkel zum Primärstrahl im allgemeinen weniger α-Teilchen erhalten werden, als nach der einfachen Voraussetzung elektrostatischer Kräfte zwischen den Ladungen von Kern und α-Teilchen erwartet werden müßte. Da die Teilchenzahlen mit wachsendem Ablenkungswinkel sehr rasch abnehmen, so wird man diesen Effekt in erster Linie einer Verkleinerung der Ablenkungswinkel zuschreiben, die durch eine Verringerung der abstoßenden Kräfte des Kerns gedeutet werden kann.

Ein solcher Effekt läßt sich nun bei den Schwermetallen Gold und Silber auch in den neueren genauen Messungen nicht nachweisen. Ebenso verschwindet er bei Aluminium und Magnesium für kleine Ablenkungen oder bei α-Teilchen geringer Reichweite. Er tritt merkbar nur auf, wenn das α-Teilchen auf seiner Bahn in die unmittelbare Nähe des Kernes gelangt. Dort scheinen also neben den nach dem Coulombschen Gesetz unter der Annahme von Punktladungen für Kern und α-Teilchen berechneten Kräften noch irgendwelche zusätzliche Anziehungskräfte aufzutreten.

Es würde natürlich wenig befriedigen, durch irgendeine ad hoc gemachte Hypothese solche anziehende Kräfte einzuführen. Man wird vielmehr versuchen, im Rahmen der bisherigen Anschauungen über Kern und α-Teilchen bleiben zu können. Eine einfache Deutung jenes Effektes läßt sich nach einem Vorschlage von Debye (6) geben. Nach unseren heutigen Vorstellungen muß der Kern ein kompliziertes System von positiven und negativen elektrischen Ladungen sein. Kommen nun zu den inneren gegenseitigen Kräften, welche das ganze Gebilde im Gleichgewicht halten, starke äußere hinzu, wie sie bei großer Annäherung des α-Teilchens an den Kern auftreten müssen, so werden diese letzteren wohl eine gewisse Deformation des Kernes zur Folge haben[1]. Es würde sich also darum handeln, ein Maß für diese Beweglichkeit der Ladungen im Kern zu finden. Debye setzt nun, analog wie er das bei seinen Betrachtungen über die Molekularkräfte gemacht hat, das durch die Verschiebung der Kernladungen gegeneinander entstehende elektrische Moment $\mathfrak{m}$ des Kerns der äußeren Feldstärke $\mathfrak{E}$ proportional:

$$\mathfrak{m} = \alpha \cdot \mathfrak{E}.$$

Das Moment α, das der Kern im elektrischen Felde von der Feldstärke 1 annimmt, wäre damit ein Maß für die Beweglichkeit der Kernbestandteile. Von dieser Polarisierbarkeit α des Kernes, die also jene anomale Zerstreuung der α-Strahlen bei Aluminium und Magnesium erklären soll, werden wir vielleicht vermuten dürfen, daß ihre Größenordnung mit den Dimensionen des Kerns einen gewissen Zusammenhang zeigt. Bei den Atomen und Molekülen ist nämlich diese Polarisierbarkeit, wie die Erfahrungen über die absolute Größe des optischen Brechungsquotienten dartun, von der Größenordnung des Atomvolumens (10^{-24} cm^3). Diese Tatsache dürfte nach Debye darauf beruhen, daß das Atom ein dynamisches System ist, dessen Elementarteilchen sich unter der Wirkung von Coulombschen Kräften bewegen. Obwohl es schwer scheint, einen genügenden Beweis für eine solche Behauptung zu liefern, mag doch eine Andeutung dafür in dem Resultat der folgenden einfachen Ähnlichkeitsbetrachtung liegen:

Ein dynamisches System, Rutherford-Bohrscher Art, das durch ein äußeres elektrisches Feld gestört wird, sei in seinem Bewegungszustand vollkommen bekannt. Sind dann für diese Bewegungen die mechanischen Gleichungen maßgebend, so kann sofort ein anderer Bewegungszustand angegeben werden, welcher die Gleichungen ebenfalls befriedigt. In der Tat ist dies der Fall, wenn alle Koordinaten mit einem Faktor λ, die Zeit mit dem Faktor $\lambda^{\frac{3}{2}}$ und die äußere Feldstärke mit dem Faktor λ^{-2} multipliziert werden, und wenn die Kräfte zwischen den bewegten Teilen dem Quadrat der Entfernungen umgekehrt proportional sind. Da das erzeugte Moment linear in den Koordinaten ist, so bedeutet das Ähnlichkeitsgesetz, daß für eine λ^2fach kleinere Feldstärke das System mit λfach größeren Dimensionen ein λfach größeres Moment annimmt. Solange also Moment und Feldstärke einander proportional sind, ist in der hier betrachteten speziellen Reihe von Systemen das Moment λ^3 und damit dem Volumen proportional.

Ganz abgesehen von der Unzulänglichkeit dieser Betrachtungsweise soll überdies nicht vergessen werden, daß auch noch die Anwendbarkeit der mechanischen Grundgleichungen in Frage steht. Trotzdem darf vielleicht vermutet werden, daß die Polarisierbarkeit α des Kernes von der Größenordnung des Kernvolumens sein werde. Eine experimentelle Bestätigung dieser Vermutung dürfte dann vielleicht als ein Hinweis auf die Weiterexistenz des Coulombschen Gesetzes selbst im Kerninnern angesehen werden.

3. Im folgenden soll nun die Bahn eines α-Teilchens bei Ablenkung durch einen Kern mit den eben geschilderten Eigenschaften bestimmt werden. Das α-Teilchen habe die als unveränderlich angenommene Masse m, die positive Ladung e und die Anfangsgeschwindigkeit v. Davon, daß wir ihm eine gewisse räumliche Ausdehnung und damit wohl auch eine eigene Polarisierbarkeit zuschreiben sollten, wird hier abgesehen. Ferner setzen wir die Gültigkeit von Energie- und Impulssatz voraus; un-

1) Die ähnliche Annahme einer Induktionswirkung des α-Teilchens auf den Kern, unter der Voraussetzung, daß dessen Ladungen auf einer Kugeloberfläche beweglich seien, ist schon früher von Pettersson (Wien. Ber. [IIa] 133, 509, 1924) gemacht worden, um die Verringerung der Abstoßung in unmittelbarer Kernnähe zu erklären.

elastische Stöße, bei denen eine dauernde Deformation des Kernes eintreten würde, sollen also ausgeschlossen sein. Vom Kern setzen wir eine positive Ladung E und die oben definierte Polarisierbarkeit α voraus. Seine endliche Masse lassen wir vorläufig unberücksichtigt; wir betrachten die ganze Bewegung relativ zu einem ruhend gedachten Kern.

Welche Kraft erfährt nun das α-Teilchen in einem Abstand r vom Kern? Sie setzt sich zusammen aus der Abstoßung der Kernladung E auf die Ladung e des α-Teilchens und der Anziehung, die das durch das letztere im Kern erzeugte elektrische Moment ausübt. Die Größe desselben ist nach der bereits gemachten Annahme über die Beweglichkeit der Ladungen im Kern

$$\mathfrak{m} = \alpha \cdot \mathfrak{E} = \alpha \frac{e}{r^2}.$$

Man erhält somit für die Kraft P und die potentielle Energie V des α-Teilchens im Felde des Kernes

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{eE}{r^2} - 2\alpha\frac{e^2}{r^5} \\ V &= \frac{eE}{r} - \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{e^2}{r^4} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Annahme eines polarisierbaren Kernes bedingt somit eine zusätzliche Anziehungskraft, die mit der fünften Potenz der Entfernung vom Kern abnimmt. Nach einem phänomenologischen Ansatz für Zusatzkräfte, die mit der dritten oder der vierten Potenz abnehmen, hat Bieler (7) den Einfluß auf die Zerstreuung von α-Strahlen bereits bestimmt. Die Annahme der mit der vierten Potenz variierenden Kraft ergibt sich im Gegensatz zu der dritten Potenz als experimentell zulässig. Auf Grund unseres bestimmten physikalischen Bildes kommt die fünfte Potenz in Frage. Es ist indessen nach den Bielerschen Untersuchungen möglich, daß auch diese letztere Potenz mit den Experimenten verträglich ist.

Daß jene anomale α-Strahlstreuung bei leichten Elementen nicht durch allfällige magnetische Momente der Atomkerne erklärbar ist, wurde kürzlich von Wessel (8) gezeigt.

4. Zur Bestimmung der Bahnkurve benutzen wir Polarkoordinaten r, φ. Nach Energie- und Impulssatz ist dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right) + \frac{eE}{r} - \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{e^2}{r^4} &= \frac{m}{2}v^2 \\ mr^2\dot\varphi &= mav \end{aligned}\right\}.$$

a bedeutet dabei den Abstand, in dem das α-Teilchen am Kern vorbeikommen würde, falls keine Kräfte wirkten und die Bahn somit gradlinig wäre. Durch Einsetzen von $\dot\varphi$ aus der 2. Gleichung in die erste und Elimination der Zeit erhält man für die Bahnkurve:

$$\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{a^4} - 2\frac{eE/a}{mv^2}\cdot\frac{r^3}{a^3} - \frac{r^2}{a^2} + \frac{e^2/a}{mv^2}\cdot\frac{\alpha}{a^3}. \quad (2)$$

Bildet man daraus

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 2\frac{r^3}{a^3} - 3\frac{eE/a}{mv^2}\cdot\frac{r^2}{a^2} - \frac{r}{a},$$

so erhält man, unter Berücksichtigung, daß

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi^2},$$

die Differentialgleichung der Bahnkurve

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{a}{r}\right) = -\frac{eE/a}{mv^2} - \frac{a}{r} + 2\frac{e^2/a}{mv^2}\cdot\frac{\alpha}{r^3}. \quad (3)$$

Nun setzen wir

$$a_0 = \frac{eE}{mv^2} \quad (4a)$$

und führen die dimensionslosen Größen ein:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{a}{r} & s &= \frac{eE/a}{mv^2} = \frac{a_0}{a} \\ q &= \alpha\frac{e}{E}\cdot\left(\frac{mv^2}{eE}\right)^3 = \frac{\alpha}{a_0^3}\cdot\frac{e}{E}. \end{aligned}\right\} \quad (4b)$$

a_0 ist dabei eine den Bedingungen des Problems angepaßte Länge und bedeutet, wie wir später sehen werden, jenen Abstand a der Anfangsrichtung des α-Teilchens vom Kern, bei dem dieses ohne Polarisationswirkung um einen rechten Winkel abgelenkt würde.

Jetzt erhält Gleichung (3) die Form

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma + s = 2qs^4\sigma^3. \quad (5)$$

σ ist also eine elliptische Funktion von φ. Umgekehrt werden wir φ als elliptisches Integral in σ darstellen können.

5. Für eine vorläufige Übersicht über den Einfluß der von uns vorausgesetzten Polarisierbarkeit des Kerns auf die Bewegung des α-Teilchens verzichten wir zunächst auf eine genaue Integration und begnügen uns mit einer Näherung, indem wir die zusätzlichen Anziehungskräfte bloß als Störung und nicht als wesentlich bestimmend für den Ablauf der Bewegung betrachten. Wir untersuchen dazu zunächst die Bahn für den Fall, daß die Polarisation überhaupt vernachlässigt werden kann. Das wird

dort der Fall sein, wo eine hohe Kernladungszahl dem α-Teilchen eine Annäherung in jenen Bereich um den Kern verwehrt, in dem die zusätzlichen Anziehungskräfte einen merklichen Beitrag an die Gesamtkraftwirkung zu liefern beginnen. Tatsächlich sind auch Abweichungen von der einfachen Annahme Coulombscher Abstoßungskräfte zwischen Kern und α-Teilchen nur bei leichten Elementen beobachtet worden, während auch die neuesten Messungen an Gold und Silber jener Annahme innerhalb der Meßgenauigkeit vollkommen genügen.

Bewegt sich ein Massenpunkt unter dem Einfluß einer Zentralkraft, die der 2. Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist, so sind die auftretenden Bahnen Kegelschnitte mit dem Kraftzentrum als Brennpunkt. Im vorliegenden Falle bewegt sich also das α-Teilchen auf einem Hyperblast mit dem abstoßenden Kern im äußeren Brennpunkt. Zur Bestimmung der Konstanten der Hyperbel aus den Bedingungen unseres Problems vernachlässigen wir in Gleichung (5) die Polarisierarbeit a des Kernes und setzen damit $q = 0$. Dementsprechend bezeichnen wir in der Folge alle Größen, die sich auf diesen Spezialfall beziehen mit dem Index Null.

Die Differentialgleichung (5) erhält dadurch die Form

$$\frac{d^2\sigma_0}{d\varphi^2} + \sigma_0 + s = 0. \tag{6}$$

Lassen wir die Koordinatenachse $\varphi = 0$ mit der Symmetrieachse der Bahn zusammenfallen und berücksichtigen wir, daß der Abstand der Bahnasymptoten vom Kern a sein soll, so wird

$$\sigma_0 = \sqrt{1 + s^2}\cos\varphi - s \tag{7}$$

das gesuchte Integral von (6).

Damit kennen wir für diesen Spezialfall ($a = 0$) die Bahn. Wie groß wird nun die Ablenkung Φ_0, die das α-Teilchen durch die Abstoßung des Kernes erfährt? Das Teilchen nähert sich dem Kern zuerst in der Richtung der einen Asymptote und verläßt ihn schließlich in der Richtung der andern. Bezeichnen wir mit φ_0 den Winkel zwischen einer Asymptote und der Symmetrieachse der Bahn, so wird offenbar die totale Ablenkung

$$\Phi_0 = \pi - 2\varphi_0. \tag{8}$$

Den Wert φ_0 aber liefert Gleichung (7); es ist derjenige Wert von φ, für den $r = \infty$, und somit $\sigma = 0$ wird, also

$$\cos\varphi_0 = \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} \quad \text{oder} \quad \operatorname{cotg}\varphi_0 = s \tag{9}$$

und somit

$$\Phi_0 = 2\operatorname{arctg}\frac{eE/a}{mv^2} \tag{10}$$

6. Um nun zu einer Näherung über den Einfluß der Polarisierbarkeit des Kernes auf die Ablenkungen der α-Teilchen zu kommen, berechnen wir uns das Integral der Differentialgleichung (5), indem wir dort in der rechten Seite σ durch den Wert σ_0 aus Gleichung (7) ersetzen. Wir wollen dabei zur Vereinfachung der Darstellung noch

$$t = \sqrt{1 + s^2} \tag{11}$$

setzen. Dann wird nach (7)

$$\sigma_0 = t\cdot\cos\varphi - s$$

und die zu integrierende Differentialgleichung

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma = -s + 2qs^4(t\cdot\cos\varphi - s)^3. \tag{12}$$

Macht man den Ansatz

$$\sigma = \sigma_0 + 2qs^4\cdot\psi(\varphi), \tag{13}$$

so erhält man für $\psi(\varphi)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \psi = (t\cdot\cos\varphi - s)^3,$$

und daraus durch Integration

$$\left.\begin{aligned}\psi = &-\frac{t^3}{8}\cos^3\varphi + st^2\cos^2\varphi\\ &+\frac{3}{2}t\left(s^2 + \frac{t^2}{4}\right)\cos\varphi - s^3 - 2st^2\\ &+\frac{3}{2}t\left(s^2 + \frac{t^2}{4}\right)\varphi\cdot\sin\varphi\\ &+A\cos\varphi + B\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

worin A und B aus den Anfangsbedingungen noch bestimmt werden müssen. Dies geschieht am besten durch direkte Bestimmung von σ und $\frac{d\sigma}{d\varphi}$ für das Perihel der Bahn, also für $\varphi = 0$. Nach dem Impulssatz ist dort die Geschwindigkeit $v_p = \sigma v$, während nach dem Energiesatz

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\sigma^2 + \frac{eE}{a}\sigma - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a^3}\cdot\frac{e^2}{a}\sigma^2$$

oder unter Benutzung der durch (4) definierten Größen

$$1 = \sigma^2 + 2s\sigma - qs^4\sigma^4.$$

Da σ während der Bewegung zuerst von Null ($r = \infty$) an steigt, brauchen wir hier die erste positive Wurzel dieser Gleichung; wir verschaffen sie uns durch eine Näherung analog wie bei der Integration der Differentialgleichung (5) und erhalten damit

$$\sigma = t - s + \frac{qs^4}{2}\cdot\frac{(t-s)^4}{t}.$$

Für $\varphi = 0$ ergibt sich damit aus Gleichung (13)

$$A = \frac{s^4}{4t}.$$

Im Perihel der Bahn ist ferner $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$, woraus durch Differentiation von (13) nach φ, $B = 0$ folgt. Man erhält so schließlich

$$\left.\begin{aligned} \sigma = {} & t\cos\varphi - s + 2qs^4\Big\{-\frac{t^3}{8}\cos^3\varphi \\ & + st^2\cos^2\varphi - s^3 - 2st^2 \\ & + \Big[\frac{s^4}{4t} + \frac{3}{2}t\Big(s^2 + \frac{t^2}{4}\Big)\Big]\cos\varphi \\ & + \frac{3}{2}t\Big(s^2 + \frac{t^2}{4}\Big)\varphi\sin\varphi\Big\}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Zur Berechnung der Ablenkung des α-Teilchens benötigen wir nunmehr den Winkel zwischen Bahnasymptote und Koordinatenachse, d. h. den Wert φ_1 von φ, für den $r = \infty$, also $\sigma = 0$ wird. Eine erste Näherung für φ_1 haben wir in φ_0, dem entsprechenden Wert bei Vernachlässigung der Polarisationswirkung; wir setzen daher

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \delta \quad (16)$$

und werden nun diesen Winkel δ, der angibt, um wieviel flacher die Bahn unter dem Einfluß der Polarisation nach beiden Seiten hin wird, als Funktion von s, t und q zu berechnen suchen. Mathematisch einfacher ist es, statt s und t, den Asymptotenwinkel für $\alpha = 0$, φ_0 neben q als unabhängige Variable einzuführen. Den Zusammenhang zwischen s und t und φ_0 liefert Gleichung (9)

$$s = \operatorname{cotg}\varphi_0, \quad t = \sqrt{1 + s^2} = \frac{1}{\sin\varphi_0}.$$

In dem Bereich, in dem diese ganze Näherung Gültigkeit haben wird, dürfen wir δ als kleinen Winkel betrachten. Es wird daher

$$t\cos\varphi_1 - s = t\Big(\frac{s}{t}\cos\delta - \frac{1}{t}\sin\delta\Big) - s = -\delta.$$

Aus dem gleichen Grunde werden wir in dem Klammerausdruck in (15) statt φ_1 überall φ_0 setzen dürfen und erhalten so für $\varphi = \varphi_1$

$$0 = -\delta + 2qs^4 \cdot \psi(\varphi_0).$$

Ersetzt man noch s und t wie angegeben durch φ_0, so wird schließlich

$$\left.\begin{aligned} \delta = {} & q\Big[\varphi_0\operatorname{cotg}^4\varphi_0\Big(\frac{15}{4}\operatorname{cotg}^2\varphi_0 + \frac{3}{4}\Big) \\ & - \operatorname{cotg}^5\varphi_0\Big(\frac{1}{2}\cos^2\varphi_0 + \frac{13}{4}\Big)\Big] \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

und somit der Ablenkungswinkel

$$\Phi = \pi - 2\varphi_1 = \Phi_0 - 2\delta. \quad (18)$$

Eine Darstellung des Verlaufs von δ als Funktion von φ_0 für $q = 1$ gibt Fig. 1. Die berechneten Funktionswerte finden sich in Tabelle I.

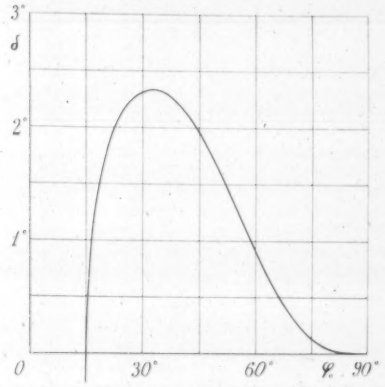


Fig. 1.

7. Nunmehr können wir daran gehen, den Einfluß der Polarisation auf die Verteilung der α-Teilchen bei der Zerstreuung über die verschiedenen Ablenkungswinkel zu berechnen. Bei bestimmter zerstreuender Substanz und α-Teilchen bestimmter Reichweite ist der Ablenkungswinkel Φ nur Funktion des Abstandes a der Anfangsrichtung des α-Teilchens vom ablenkenden Kern. Alle Teilchen, die ohne Kraftwirkung in einem Abstande zwischen a und $a + da$ an einem Kern vorbeikommen würden, werden so um einen Winkel zwischen Φ und $\Phi + d\Phi$ abgelenkt. Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Ablenkung ist somit proportional $2\pi a da$. Diese Teilchen verteilen sich aber über einen Raumwinkel $2\pi \sin\Phi d\Phi$. Die Wahrscheinlichkeit der Ablenkung in einen konstanten Raumwinkel unter dem Winkel Φ zur Richtung des Primärstrahles wird daher proportional

$$\frac{2\pi a da}{2\pi\sin\Phi d\Phi}.$$

Wir wollen diesen Quotienten die relative Wahrscheinlichkeit w für die Ablenkung um Φ nennen. Es ist also

$$w = \frac{a}{\sin\Phi}\cdot\frac{da}{d\Phi}. \quad (19)$$

Die Berechnung dieser relativen Wahrscheinlichkeit erfordert die Kenntnis des funktionalen

Zusammenhanges zwischen a und Φ. Diesen letzteren haben wir aber in den vorhergehenden Abschnitten ermittelt.

So ist, wenn wir bloß die Abstoßungskräfte der Punktladungen von Kern und α-Teilchen berücksichtigen, nach (4) und (9)

$$a = \frac{eE}{mv^2} \operatorname{tg} \varphi_0,$$

und da nach (8)

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}(\pi - \Phi),$$

so wird

$$a = \frac{eE}{mv^2} \operatorname{cotg} \frac{\Phi}{2}$$

und somit

$$w_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{eE}{mv^2}\right)^2 \frac{\operatorname{cotg} \frac{\Phi}{2}}{\sin \Phi \sin^2 \frac{\Phi}{2}}$$

$$w_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{eE}{mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Phi}{2}}. \qquad (20)$$

In diesem Fall nehmen also die Teilchenzahlen mit zunehmendem Ablenkungswinkel Φ wie $\frac{1}{\sin^4 \Phi/2}$ ab und variieren bei konstanter Ablenkung umgekehrt mit der vierten Potenz der Anfangsgeschwindigkeit. Diese beiden Zusammenhänge sind bei schweren Elementen als zerstreuende Substanz stets in weitestem Umfange experimentell bestätigt gefunden worden[1]).

Analog können wir uns die relative Wahrscheinlichkeit w berechnen bei Berücksichtigung der Polarisation des Kernes durch das α-Teilchen. Hier ist nach (16) und (18)

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}(\pi - \Phi) - \delta$$

somit

$$a = \frac{eE}{mv^2} \operatorname{cotg}\left(\frac{\Phi}{2} + \delta\right)$$

und es wird also

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{eE}{mv^2}\right)^2 \frac{\operatorname{cotg}\left(\frac{\Phi}{2} + \delta\right)}{\sin \Phi \sin^2\left(\frac{\Phi}{2} + \delta\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{\Phi}{2} + \delta\right)}{d\frac{\Phi}{2}}. \qquad (21)$$

Um ein Maß zu haben für den Einfluß der Polarisation des Kernes auf die Zerstreuung der α-Teilchen, bilden wir den Quotienten V der relativen Wahrscheinlichkeiten einer Ablenkung um Φ mit oder ohne Polarisationswirkung:

$$V = \frac{w}{w_0} = \frac{\operatorname{cotg}\left(\frac{\Phi}{2} + \delta\right)}{\sin^2\left(\frac{\Phi}{2} + \delta\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{\Phi}{2} + \delta\right)}{d\frac{\Phi}{2}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\Phi}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\Phi}{2}}. \qquad (22)$$

Für die Rechnung erweist es sich nun bequemer, alle vorkommenden Größen als Funktion von φ_0 auszudrücken, wie das auch für δ geschah. Man erhält so

$$V = \frac{\sin \varphi_0}{\cos^3 \varphi_0} \cdot \frac{\sin^3(\varphi_0 + \delta)}{\cos^3(\varphi_0 + \delta)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d\delta}{d\varphi_0}}. \qquad (23)$$

Tabelle I.

φ_0	q	δ	φ_1	$\frac{d\delta}{d\varphi_0}$	V	Φ
30°	1	0,0405	32° 20′	+ 0,013	0,86	125° 20′
	2	0,0810	34° 30′	+ 0,025	0,74	110° 42′
	4	0,1620	39° 18′	+ 0,050	0,54	101° 24′
	6	0,2430	43° 57′	+ 0,076	0,38	92° 6′
45°	1	0,0343	46° 58′	— 0,055	0,92	86° 4′
	2	0,0686	48° 57′	— 0,111	0,85	82° 6′
	4	0,1372	52° 54′	— 0,221	0,71	74° 12′
	6	0,2057	56° 51′	— 0,332	0,58	66° 18′
60°	1	0,0162	60° 55′	— 0,071	0,98	58° 10′
	2	0,0324	61° 51′	— 0,143	0,96	56° 18′
	4	0,0048	63° 42′	0,286	0,94	52° 36′
	6	0,0972	65° 33′	— 0,429	0,94	48° 54′
75°	1	0,0023	75° 8′	— 0,028	1,00	29° 44′
	2	0,0047	75° 16′	— 0,056	1,00	29° 28′
	4	0,0094	75° 32′	— 0,113	1,01	28° 56′
	6	0,0140	75° 48′	— 0,169	1,02	28° 24′

Die zweitletzte Kolonne in Tabelle I gibt die nach dieser Formel berechneten Werte von V bei Variation von q und φ_0 an, während in Fig. 2 V als Funktion von Φ für $q = 1, 2, 4$ und 6 aufgetragen ist.

Die hier berechnete Funktion V gibt die Abweichungen, wie sie von Bieler (4) bestimmt wurden (siehe Fig. 9), in ihrem wesentlichen Verlauf gut wieder. Eine mit der fünften Potenz der Entfernung vom Kern abnehmende zusätzliche Anziehungskraft steht also durchaus nicht im Widerspruch mit den experimentellen Erfahrungen. Ebenso lassen sich die Messungen von Rutherford und Chadwick (5) über die

1) Kürzlich hat G. Wentzel (Zeitschr. f. Phys. 40, 590. 1926) gezeigt, daß diese Verteilung der zerstreuten α-Teilchen auch aus einer näherungsweisen Berechnung nach der Schrödingerschen Quantenmechanik folgt.

Abweichungen der α-Teilchenzahlen bei konstanter Ablenkung um 90° und Variation der Anfangsgeschwindigkeit auf Grund dieser Näherungsrechnung gut darstellen, wie in einer vorläufigen Mitteilung (6) gezeigt wurde.

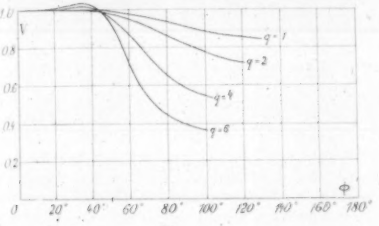


Fig. 2.

8. Wir gehen nunmehr zur genauen Berechnung der Bahnkurven über. Diese könnten erhalten werden durch Untersuchung der durch die Differentialgleichung (5) gegebenen elliptischen Funktion $\sigma(\varphi)$. Relativ einfacher aber gestaltet sich die Rechnung, wenn wir φ als Funktion von σ und damit von r darzustellen suchen; wir kommen damit auf ein elliptisches Integral.

Ähnlich wie bei der Näherung werden wir auch hier an Stelle der Variabeln r und der 4 Parameter a, mv^2, E und α gewisse dimensionslose Kombinationen derselben einführen, und zwar setzen wir hier

$$\varrho = \frac{1}{r}\cdot\frac{eE}{mv^2} \qquad p = a\,\frac{mv^2}{eE}$$
$$q = \alpha\,\frac{e}{E}\left(\frac{mv^2}{eE}\right)^3. \tag{24}$$

Führen wir wie früher $a_0 = \frac{eE}{mv^2}$ ein, den Abstand der Anfangsrichtung des α-Teilchens vom Kern, bei dem dieses ohne Polarisationswirkung um einen rechten Winkel abgelenkt würde, so ist

$$\varrho = \frac{a_0}{r} \qquad p = \frac{a}{a_0} \qquad q = \frac{\alpha}{a_0^3}\,\frac{e}{E}. \tag{24a}$$

Im Vergleich mit den bei der Näherung verwendeten Größen σ, s und q ist hier

$$\varrho = \frac{a_0}{a}\,\sigma = s\sigma \qquad p = \frac{1}{s}. \tag{24b}$$

Zur Bestimmung der gesuchten Funktion $\varphi(r)$ gehen wir aus von Gleichung (2)

$$\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{a^4} - 2\,\frac{eE/a}{mv^2}\cdot\frac{r^3}{a^3} - \frac{r^2}{a^2} + \frac{e^2/a}{mv^2}\cdot\frac{\alpha}{a^3}.$$

Unter Berücksichtigung von (24) erhält man daraus

$$\left(p\,\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = 1 - 2\varrho - p^2\varrho^2 + q\varrho^4 \tag{25}$$

und somit

$$\varphi = \int_0^{\varrho} \frac{p\,d\varrho}{\sqrt{1 - 2\varrho - p^2\varrho^2 + q\varrho^4}}, \tag{26}$$

wenn wir uns die Koordinatenachse $\varphi = 0$ parallel der Anfangsrichtung der Bewegung durch den Kern gelegt denken. Im Verlaufe der Bewegung nimmt der Abstand r des α-Teilchens vom Kern von ∞ an ab. Infolge der Abstoßung durch die Kernladung wird dabei im allgemeinen ein bestimmter Minimalabstand existieren, von dem aus sich die Bewegung, da die wirkenden Kräfte zentralsymmetrischer Natur sind, symmetrisch fortsetzt. Der diesem Minimalabstand entsprechende Maximalwert von ϱ bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0,$$

oder nach (25) aus

$$1 - 2\varrho - p^2\varrho^2 + q\varrho^4 = 0. \tag{27}$$

Da ϱ während der Bewegung von Null an wächst, entspricht die erste positive Wurzel dieser Gleichung dem gesuchten Maximalwert von ϱ. Durch Integration von (26) bis zu diesem Maximalwert erhalten wir den Winkel φ_1 zwischen der Bahnasymptote und der Symmetrieachse der Bahn, und es wird daher jetzt der totale Ablenkungswinkel

$$\Phi = \pi - 2\int_0^{\varrho_{\max}} \frac{p\,d\varrho}{\sqrt{1 - 2\varrho - p^2\varrho^2 + q\varrho^4}}. \tag{28}$$

Bei Vernachlässigung der Polarisationswirkung, das heißt für $q = 0$ läßt sich auch hier die Integration sofort durchführen; man erhält

$$\Phi_0 = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$$

oder, entsprechend Gleichung (10) und (24)

$$\Phi_0 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{eE/a}{mv^2}.$$

9. Vor der näheren Berechnung des Integrals (28) fragen wir nach den Werten, die für die beiden dimensionslosen Parameter p und q in Frage kommen, von denen der Ablenkungswinkel und damit die Form der Bahnkurve abhängt. Wir untersuchen dazu die unter der Wurzel im Integranden auftretende Funktion

$$s = 1 - 2\varrho - p^2\varrho^2 + q\varrho^4. \tag{29}$$

Sie nimmt, wenn ϱ von Null an wächst, vorerst von 1 an ab, bis bei größeren Werten von ϱ der Einfluß des Gliedes $p\varrho^4$ überwiegt und ein Wiederanwachsen von s bedingt. Während der zu untersuchenden Bewegung des α-Teilchens wächst ϱ, wie wir sahen, von Null an bis zu einem Maximalwert ϱ_{max}, der nach (27) durch die erste positive Nullstelle von s bestimmt ist. Es wird nun von den Werten von p und q abhängen, ob ein reeller Wert für diese Nullstelle

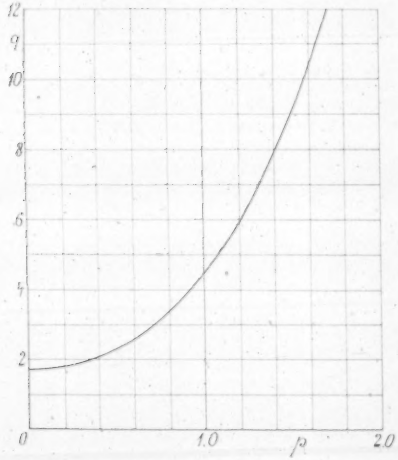


Fig. 3.

auftritt oder nicht; jenachdem wird nach unseren Voraussetzungen bei der Bewegung ein bestimmter Minimalabstand des α-Teilchens vom Kern existieren, oder aber das α-Teilchen sich dem Kern unbeschränkt nähern, das heißt von demselben eingefangen werden.

Denken wir uns s als Funktion von ϱ aufgetragen, so wird im ersten Fall die Kurve die Abszissenachse schneiden, und zwar zweimal, da für große Werte von ϱ das stets positive Glied $q\varrho^4$ überwiegt. Der Übergang zum zweiten Fall des Einfangens des α-Teilchens aber wird dadurch gekennzeichnet sein, daß die Kurve die ϱ-Achse gerade berührt. Hierfür müssen gleichzeitig die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 1 - 2\varrho - p^2\varrho^2 + q\varrho^4 &= 0 \\ -2 - 2p^2\varrho + 4q\varrho^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

erfüllt sein. Durch Elimination von ϱ erhält man hieraus die Beziehung, die p und q für den Grenzfall des Einfangens befriedigen müssen. Sie ist dargestellt in Tabelle II und Fig. 3.

Tabelle II.

q	p
1,6875	0,00000
1,70	0,07449
1,80	0,22238
1,90	0,30422
2,00	0,36727
2,10	0,42011
4,41	1,00000
8,00	1,41421
17,54	2,00000

Erst wenn q den Wert $1{,}6875 = 27/16$ überschreitet, kann somit bei kleinen Werten von p, also bei fast zentralen Stößen, die Anziehung infolge der Polarisationswirkung die Abstoßung durch die Kernladung übertreffen. Andrerseits werden aber zum Beispiel bereits für $q = 4{,}41$ alle α-Teilchen eingefangen, die ohne Polarisationswirkung um mehr als einen rechten Winkel ($p = 1$) abgelenkt würden.

10. Die Berechnung der Bahnkurven und der Ablenkungswinkel mittels des Integrals (28) geschah nun in folgender Weise: Zuerst wurde nach (27) der Wert ϱ_{max} der oberen Integrationsgrenze bestimmt und darauf das Integrationsgebiet in 6—8 Intervalle geteilt, wobei, um eine gleichmäßige Genauigkeit zu erzielen, die Größe der Intervalle mit wachsenden Werten des Integranden entsprechend kleiner gewählt wurde. Die Werte dieser Teilintegrale wurde nach der Simpsonschen Formel bestimmt. In der Nähe von ϱ_{max} aber, wo der Integrand unbeschränkt zunimmt, wurde eine Näherung benutzt. Es wurde dazu die Funktion

$$s = 1 - 2\varrho - p^2\varrho^2 + q\varrho^4$$

für einen Wert ϱ_0 in der Mitte des letzten Intervalles entwickelt. Für eine erste Näherung setzten wir dabei

$$s = s(\varrho_0) + 2a(\varrho - \varrho_0),$$

wobei

$$2a = \left(\frac{ds}{d\varrho}\right)_{\varrho_0} = 4q\varrho_0^3 - 2p^2\varrho_0 - 2.$$

Dann erhält man unter Berücksichtigung, daß $s(\varrho_{max}) = 0$ für das Intervall von ϱ_1 bis ϱ_{max}

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_{max}} \frac{d\varrho}{\sqrt{s}} = -\frac{\sqrt{s(\varrho_1)}}{a}. \qquad (31)$$

Diese Näherung hat aber bloß dann einen Sinn, wenn a und damit der erste Differentialquotient von s nach ϱ in der Umgebung von ϱ_{max} wesentlich von Null verschieden ist. Wie Überlegungen ähnlich denen im vorigen Abschnitt zeigen, ist

das aber gerade dann nicht mehr der Fall, wenn die Polarisation des Atomkernes von wesentlichem Einfluß auf die Bewegung des α-Teilchens wird. Dann muß noch ein weiteres Glied in der Entwicklung von s berücksichtigt werden:

$$s = s_0 + 2a(\varrho - \varrho_0) + b(\varrho - \varrho_0)^2,$$

wobei

$$2a = \left(\frac{ds}{d\varrho}\right)_{\varrho_0} = 4q\varrho_0^3 - 2p^2\varrho_0 - 2$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2s}{d\varrho^2}\right)_{\varrho_0} = 6q\varrho_0^2 - p^2.$$

Berücksichtigt man wiederum, daß $s(\varrho_{max}) = 0$, so wird jetzt

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_{max}} \frac{d\varrho}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \frac{a + b(\varrho_{max} - \varrho_0)}{a + b(\varrho_1 - \varrho_0) + \sqrt{b \cdot s(\varrho_1)}}. \quad (32)$$

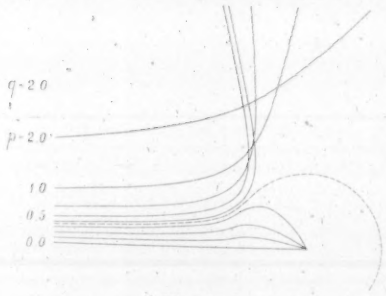


Fig. 4.

In dieser Art und Weise wurden die Bahnkurven und damit die totalen Ablenkungswinkel berechnet. Die Genauigkeit, die dabei erreicht wurde, betrug im Mittel etwa eine Bogenminute.

Um ein Beispiel für die unter der Wirkung der Polarisation des Atomkernes auftretenden Bahnkurven der α-Teilchen zu geben, mögen hier die Resultate der Berechnungen für

$$q = a\frac{e}{E}\left(\frac{mv^2}{eE}\right)^3 = 2$$

in Fig. 4 veranschaulicht werden. Es entspricht das etwa den Verhältnissen, wie sie bei der Zerstreuung der schnellen α-Strahlen von Radium C (7 cm Reichweite) durch Aluminium auftreten. Die Figur zeigt hier die Bahnen von α-Teilchen bestimmter Geschwindigkeit, bei denen der Anfangsabstand variiert wird. Bei großen Werten desselben, d. h., wenn $p = a\frac{mv^2}{eE} > 1$, ergeben sich keine wesentlichen Unterschiede gegenüber den Verhältnissen bei Vernachlässigung der Polarisationswirkung. Mit abnehmenden Werten des Anfangsabstandes nimmt der Ablenkungswinkel zu; doch ist die Zunahme geringer, als wenn bloß die Abstoßung der Kernladung berücksichtigt wird. Um eine bestimmte Ablenkung zu erfahren, müssen die α-Teilchen hier ihre Bewegung bei einem kleineren Anfangsabstand beginnen, woraus sich bei Berücksichtigung der räumlichen Verteilung eine geringere Teilchenzahl in der betreffenden Richtung ergibt. Bei weiterer Abnahme des Anfangsabstandes kann nun die Verringerung der Ablenkung infolge der Polarisationswirkung die Zunahme der Ablenkung durch die Abstoßung der Kernladung sogar kompensieren; der Ablenkungswinkel nimmt jetzt nicht mehr zu, sondern wieder ab. In unserem Beispiel erkennt man das deutlich daran, daß die Kurve für $p = 0{,}4$ diejenige für $p = 0{,}5$ nicht mehr schneidet, sondern ihr schon fast wieder parallel verläuft, während man die größte hier mögliche Ablenkung für den Zwischenwert $p = 0{,}437$ erhalten würde.

Hier macht sich nun die Polarisationswirkung auch bereits in der Form der Bahnkurve bemerkbar; die Kurve für $p = 0{,}4$ verläuft in der Kernnähe bedeutend flacher als eine ähnlich liegende Hyperbel. Lassen wir den Anfangsabstand weiter abnehmen, so kommen wir in jenes Gebiet hinein, in dem die Abstoßung durch die Kernladung von der Anziehung infolge der Polarisation des Kernes übertroffen wird. Zwar können unter dem Einfluß der Trägheitskräfte noch Bahnen zustande kommen, in denen das α-Teilchen, evtl. nach mehrmaliger Umschlingung des Kernes, sich von diesem wieder entfernt und wobei Zerstreuungen über alle möglichen Winkel auftreten. Doch ist der Bereich für die Möglichkeit solcher Bahnen nur ein schmaler. Schon für den Wert $p = 0{,}367$ erhält man nach den Berechnungen des vorigen Abschnittes den Grenzfall für das Einfangen des α-Teilchens durch den Kern; das α-Teilchen würde sich jetzt, sofern man auch in diesem geringen Abstand vom Kern noch nach dem bisherigen Ansatz rechnen dürfte, asymptotisch einer Kreisbahn nähern, wie sie in der Figur durch die gestrichelte Kurve dargestellt ist. Völliges Einfangen in den Kern hätte man dann schließlich für die noch zentraler gegen diesen auftreffenden α-Teilchen; des Interesses wegen seien auch ihre Bahnen, wie sie sich nach diesen Berechnungen ergeben würden, bis ins Kraftzentrum hinein eingezeichnet.

Für die Verteilung der gestreuten α-Teilchen über die verschiedenen Ablenkungswinkel, die ja allein experimentell geprüft werden kann, würde sich hiernach neben der schon weiter oben erwähnten unternormalen Streuung bei kleineren

Ablenkungswinkeln, eine erneute Zunahme im Gebiete des maximalen Ablenkungswinkels ergeben, wie sie in der Figur durch die Parallelität der Kurven für $p = 0{,}5$ und $0{,}4$ anschaulich zum Ausdruck kommt. Jenseits des maximalen

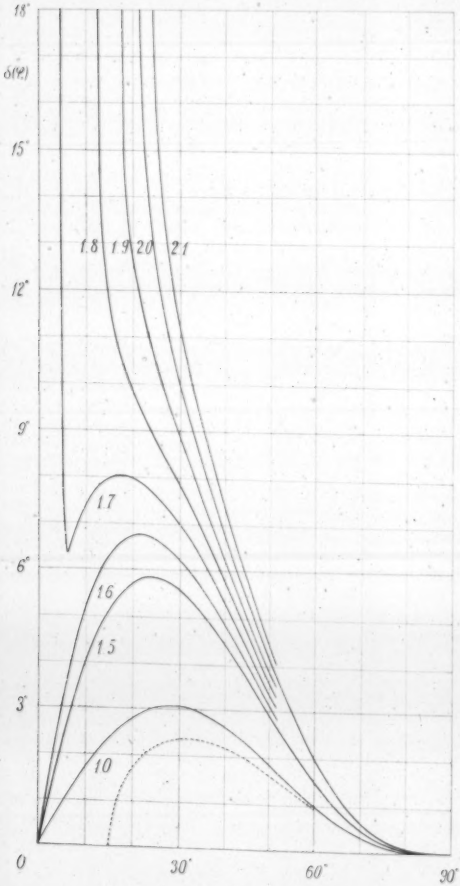


Fig. 5.

Ablenkungswinkels aber wären hiernach nur jene wenigen α-Teilchen zu erwarten, die an der Grenze des Eingefangenwerdens über alle möglichen Winkel zerstreut werden.

11. Da die genaue Berechnung der Ablenkungswinkel nach (28), wie aus dem vorigen Abschnitt hervorgeht, eine ziemlich zeitraubende war, konnte nicht daran gedacht werden, diese Berechnungen für ein vollständiges System der in Betracht kommenden Werte von p und q durchzuführen; es wurden daher nur jene Werte berechnet die einen Überblick über die charakteristischen Abweichungen von der einfachen Theorie zu geben versprachen. Um weiterhin den Anschluß an die mit der Näherungsmethode gewonnenen Resultate zu erhalten, wurde auch hier die halbe Differenz der Ablenkungswinkel mit und ohne Polarisationswirkung

$$\delta = \frac{1}{2}(\Phi_0 - \Phi)$$

als Funktion von $\varphi_0 = \operatorname{arcgt} p$ aufgetragen. Fig. 5 stellt die Resultate dar. Vollständig berechnet sind nur die Kurven für $q = 1{,}0$ $1{,}5$ und $2{,}0$, während für die übrigen bloß einzelne Punkte bestimmt wurden.

Zum Vergleich ist auch noch die mittels der Näherung gefundene Kurve $\delta\,(q = 1)$ gestrichelt eingezeichnet. Man kann daraus erkennen, inwieweit diese Näherung den charakteristischen Verlauf der Abweichungen darstellen kann.

Zur Berechnung des Verhältnisses V der mit und ohne Polarisationswirkung gestreuten α-Teilchen nach (23) benötigen wir noch die Werte von $\frac{d\delta}{d\varphi_0}$; sie wurden graphisch ermittelt. Tabelle III gibt Aufschluß über die numerischen Werte von δ und $\frac{d\delta}{d\varphi_0}$, mittels deren das Verhältnis V in Abhängigkeit von Ablenkungs-

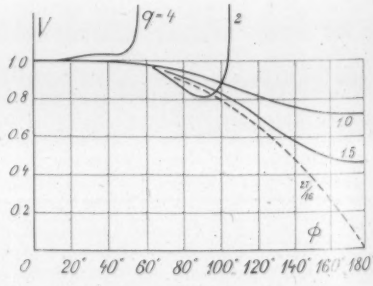


Fig. 6.

winkel und Anfangsgeschwindigkeit der α-Teilchen berechnet wurde; eine graphische Darstellung des Verlaufs von V als Funktion von Φ und q gibt Fig. 6.

Für kleine Ablenkungswinkel ergibt sich hiernach für V keine Änderung gegenüber den bei der Näherungsrechnung gewonnenen Resul-

Tabelle III.

	φ_0	δ	$\frac{d\delta}{d\varphi_0}$	V	Φ
$q = 1{,}0$	0,00	0,0000	+ 0,185	0,712	180° 0′
	0,15	0,0260	+ 0,150	0,733	159° 50′
	0,25	0,0393	+ 0,114	0,754	146° 52′
	0,40	0,0512	+ 0,046	0,796	128° 18′
	0,50	0,0533	− 0,002	0,833	116° 36′
	0,75	0,0423	− 0,074	0,914	89° 14′
	1,00	0,0207	− 0,084	0,979	63° 2′
	1,30	0,0026	− 0,032	1,000	30° 44′
$q = 1{,}5$	0,00	0,0000	+ 0,480	0,451	180° 0′
	0,15	0,0623	+ 0,327	0,517	155° 40′
	0,25	0,0870	+ 0,175	0,589	141° 24′
	0,40	0,1016	+ 0,012	0,691	122° 32′
	0,50	0,0988	− 0,067	0,760	111° 22′
	0,75	0,0696	− 0,146	0,886	86° 6′
	1,00	0,0323	− 0,135	0,969	61° 42′
	1,30	0,0039	− 0,043	1,003	30° 36′
$q = 2{,}0$	0,50	0,1844	− 0,405	0,877	101° 34′
	0,75	0,1036	− 0,271	0,899	82° 12′
	1,00	0,0444	− 0,198	0,975	60° 18′
	1,30	0,0052	− 0,058	1,004	30° 26′

taten (Fig. 2). Man erhält überhaupt in diesem Gebiete nur unmerkliche Abweichungen von den Resultaten der einfachen Theorie, in völliger Übereinstimmung mit den Messungen von Bieler (4) an Aluminium und Magnesium.

Erst bei Ablenkungen über 45° sinkt V merklich unter 1, behält aber auch für große Ablenkungen stets einen endlichen Wert, solange $q < {}^{27}/_{16}$. Für $\Phi = 180°$ sinkt dort, wie Fig. 5 zeigt, $\delta(\varphi_0)$ auf Null, nicht aber $\frac{d\delta}{d\varphi_0}$, so daß für kleine Werte von φ_0 $\delta = \frac{d\delta}{d\varphi_0}\varphi_0$ gesetzt werden kann. Daher erhält man für

$$V_{180} = \lim_{\varphi_0 = 0} \left(\frac{\sin\varphi_0}{\cos^3\varphi_0} \cdot \frac{\cos^3(\varphi_0 + \delta)}{\sin(\varphi_0 + \delta)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d\delta}{d\varphi_0}} \right)$$

den endlichen Grenzwert

$$V_{180} = \frac{1}{\left(1 + \frac{d\delta}{d\varphi_0}\right)^2} \qquad (33)$$

Sobald jedoch q den Wert ${}^{27}/_{16} = 1{,}6875$ übersteigt, wird der Verlauf des Verhältnisses V der α-Teilchenzahlen mit und ohne Polarisationswirkung bei großen Ablenkungswinkeln ein wesentlich anderer. Da mit abnehmendem φ_0, das heißt wachsender Ablenkung, δ jetzt unbeschränkt zunimmt, so sinkt hier $\frac{d\delta}{d\varphi_0}$ rasch nach negativen Werten. Der Ausdruck $1 + \frac{d\delta}{d\varphi_0}$ im Nenner von Formel (23) für V wird dabei klein und bewirkt für V einen Wiederanstieg zu großen Werten für $\frac{d\delta}{d\varphi_0} = -1$. Hierin zeigt sich nun der Unterschied gegenüber den durch die Näherung gelieferten Resultaten; dort entsprach bei großen Werten der Ablenkung einer Zunahme von

$$q = \alpha \frac{e}{E} \left(\frac{mv^2}{eE} \right)^3$$

stets eine Abnahme des Verhältnisses V, da bei der Näherung alle Kurven vom Typus $q < {}^{27}/_{16}$ sind. Die genaue Rechnung aber zeigt, daß in Übereinstimmung mit den an Fig. 4 auf anschaulichem Wege gewonnenen Resultaten, für einen bestimmten maximalen Ablenkungswinkel, gegeben durch $\frac{d\delta}{d\varphi_0} = -1$, ein Wiederanstieg des Verhältnisses V auftreten muß. Jenseits dieses Grenzwinkels aber verliert die Formel (23) ihren Sinn; wir erhalten dort aber nur noch einige jener wenigen α-Teilchen, die infolge der Polarisationswirkung an der Grenze des Eingefangenwerdens durch den Kern über alle möglichen Winkel zerstreut werden. Sie können in ihrer kleinen Anzahl in der Darstellung in Fig. 6 ohne weiteres vernachlässigt werden.

Schließlich soll das Verhältnis V noch dargestellt werden, wie es sich ergibt bei Beobachtung unter einem konstanten Ablenkungswinkel Φ und Variation der Anfangsgeschwindigkeit der α-Teilchen. Da nach (18)

$$\Phi = \pi - 2(\varphi_0 + \delta),$$

so muß dafür in Formel (23) für V $\varphi_0 + \delta$ konstant gehalten werden, während q variiert; das heißt, man bestimmt aus Fig. 5 die Werte von δ und φ_0, die bei Variation von q zu konstanten Werten von $\varphi_0 + \delta$ gehören, also auf der Geraden

$$\varphi_0 + \delta = \frac{1}{2}(\pi - \Phi) \qquad (34)$$

liegen. Da die vorliegenden Messungen von Rutherford und Chadwick (5) V in diesem Fall als Funktion der reziproken anfänglichen kinetischen Energie des α-Teilchens darstellen, so wählen wir als Abszisse

$$q^{-\frac{1}{3}} = \frac{eE}{mv^2}\left(\alpha\,\frac{e}{E}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Dann läßt sich der Verlauf von V bei Variation der Anfangsbedingungen für jeden Ablenkungswinkel durch eine bestimmte Kurve darstellen, wie dies in Fig. 7 für die Ablenkungen um 60°, 90° und 135° geschehen ist.

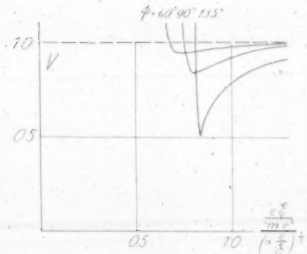


Fig. 7.

Abszissenwerte für die Asymptoten des Wiederanstieges sind dabei jene Werte q, deren Kurve $\delta(\varphi_0)$ in Fig. 5 die Gerade

$$\varphi_0 + \delta = \frac{1}{2}(\pi - \Phi) \qquad (34)$$

berührt. Die Abszissenwerte der Minima von V hingegen ergeben sich aus der Gleichung $\frac{dV}{dq^{-\frac{1}{3}}} = 0$ mit der Nebenbedingung (34). Daraus erhält man schließlich als Bedingung für den Minimalwert von V

$$\operatorname{cotg}\varphi_0 + 3\operatorname{tg}\varphi_0 - \frac{\frac{d^2\delta}{d\varphi_0^2}}{1 + \frac{d\delta}{d\varphi_0}} = 0. \qquad (35)$$

Das Wertepaar (φ_0, δ), das dieser Differentialgleichung und der Nebenbedingung (34) genügt, bestimmt dann nach dem durch Fig. 5 gegebenen Zusammenhang zwischen φ_0, δ und q die Abszisse q, für die das Minimum von V eintritt.

12. Bisher wurde bei der Bewegung des α-Teilchens stets der Kern als ruhend betrachtet und die Bewegung, in die dieser selber durch den Stoß des α-Teilchens versetzt wird, nicht berücksichtigt. Das kann aber leicht geschehen. Ist die Masse des Kernes M und setzen wir in bekannter Weise statt der Masse m des α-Teilchens eine durch die Gleichung

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$$

definierte Masse μ in die Bewegungsgleichungen ein, so liefern sie den Ablenkungswinkel Φ, relativ zu einem Koordinatensystem, das sich mit dem Kern bewegt. Da für Kern und α-Teilchen zusammen, solange wir unelastische Stöße ausschließen, Energie- und Impulssatz erfüllt sein müssen, hängt die Bewegung des Kernes und damit auch die durch sie hervorgerufene Änderung des Ablenkungswinkels gar nicht ab von dem zwischen den beiden Massen wirkenden Kraftgesetz, sondern nur vom Ablenkungswinkel und dem Verhältnis der beiden Massen. Bezeichnen wir wie bisher mit Φ den Ablenkungswinkel des α-Teilchens in einem Koordinatensystem, das sich mit dem Kern bewegt, mit Φ' aber die Ablenkung für einen ruhenden Beobachter, so ist nach Darwin (9) und Bieler (7)

$$\operatorname{cotg}\Phi' = \operatorname{cotg}\Phi + \frac{m}{M}\cdot\frac{1}{\sin\Phi}, \qquad (36)$$

wobei m und M die Massen von α-Teilchen und Kern bedeuten.

Alle α-Teilchen, die früher mit oder ohne Polarisationswirkung um Φ abgelenkt wurden, erfahren bei Berücksichtigung der endlichen Kernmasse die Ablenkung Φ'. Das Verhältnis V der α-Teilchenzahlen für den beobachteten Ablenkungswinkel Φ' ist daher gleich dem früher für den Winkel Φ berechneten, der nach Gleichung (36) für das betreffende Massenverhältnis zu Φ' gehört.

Als Beispiel für den Einfluß der Mitbewegung des Kernes wurde dieser für Aluminium als zerstreuende Substanz, für die die besten Beobachtungen vorliegen, berechnet. Das Massenverhältnis ist in diesem Fall $\frac{m}{M} = \frac{4}{27}$; man erhält damit für den Zusammenhang zwischen Φ und Φ' für Aluminium Tabelle IV.

Da Φ' stets kleiner als Φ ist, bekommt man für einen bestimmten Ablenkungswinkel Φ' bei Berücksichtigung der Mitbewegung des Kernes im allgemeinen eine weitere Verkleinerung des Verhältnisses V.

Tabelle IV.

Φ'	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Φ	0°	17° 12′	34° 14′	51° 0′	67° 22′	83° 13′	98° 31′
Φ'	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
Φ	98° 31′	113° 13′	127° 22′	141° 0′	154° 14′	167° 12′	180°

Es ergibt sich daraus aber keine wesentliche Änderung für den Verlauf von V. Wir wollen dies für den Ablenkungswinkel 90° zeigen, für den der Unterschied zwischen Φ und Φ' ein Maximum erreicht. Wir berechnen dazu V nach den Angaben am Schlusse des vorigen Abschnittes als Funktion von $q^{-\frac{1}{3}}$ einmal für $\Phi = 90°$ und dann für $\Phi' = 90°$, das heißt nach dem Zusammenhang zwischen Φ und Φ', für $\Phi = 98° 31'$. Fig. 8 gibt die Resultate; die gestrichelte Kurve zeigt den Verlauf von V ohne, die ausgezogene denjenigen mit Berücksichtigung der Mitbewegung des Kernes, beidemal unter der Annahme, daß auch die ohne Polarisationswirkung berechneten Teilchenzahlen, mit denen wir vergleichen, entsprechend berechnet sind.

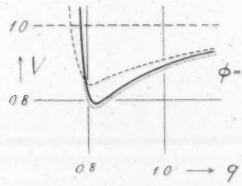


Fig. 8.

Ist dies nicht der Fall, dann wäre das Verhältnis der α-Teilchenzahlen mit Polarisationswirkung und Mitbewegung des Kerns zu den nach dem einfachen Grundgesetz (20) gegebenen zu berechnen. Dieses ergibt sich, indem man die Ordinaten der ausgezogenen Kurve in Fig. 8 mit dem Verhältnis der Teilchenzahlen mit und ohne Berücksichtigung der Kernbewegung beim einfachen Grundgesetz multipliziert. Das letztere ist dabei nach Darwin (9) in erster Näherung gegeben durch

$$1 - 2\left(\frac{m}{M}\right)^2 \sin^4 \frac{\Phi}{2}.$$

Die hierdurch erhaltenen Werte für V sind durch die punktierte Kurve in Fig. 8 dargestellt.

13. Aus den vorstehenden Rechnungen kennen wir nunmehr den Einfluß der Polarisierbarkeit der Atomkerne auf die Zerstreuung der α-Strahlen. Es bleibt uns nun noch, diese Resultate mit den bisher bekannten Experimenten zu vergleichen, um daraus zu entnehmen, inwieweit die hier benutzten Grundlagen zu einem zutreffenden Bilde führen können. Die Voraussetzungen der ganzen Rechnung waren, nochmals kurz zusammengefaßt, die folgenden:

1. Der Atomkern erfährt im elektrischen Felde des herannahenden α-Teilchens eine Verschiebung seiner Ladungen; das dadurch hervorgerufene elektrische Moment erzeugt eine zusätzliche, umgekehrt mit der fünften Potenz des Abstandes vom Kern variierende Anziehungskraft.

2. Das α-Teilchen wird in seiner Kraftwirkung nach außen als Punktladung betrachtet.

3. Für seine Bewegung gelten Energie- und Impulssatz; unelastische Stöße, bei denen Energie auf das Kerninnere übertragen würde, sollen ausgeschlossen sein.

4. Es gelten die Gesetze der klassischen Mechanik.

Zusammenhängende Messungen über Abweichungen von der normalen α-Strahlzerstreuung sind, wie schon gelegentlich erwähnt wurde, von Bieler (4) und von Rutherford und Chadwick (5) durchgeführt worden. Als geeignete zerstreuende Substanzen wurden Aluminium- und Magnesiumfolien verwendet. Von Bieler wurde das Verhältnis V bestimmt für α-Teilchen konstanter Geschwindigkeit, bei Variation der Ablenkung, von Rutherford und Chadwick hingegen für einen bestimmten Ablenkungswinkel bei Variation der Geschwindigkeit. Beide Gruppen von Messungen zeigen im wesentlichen den Verlauf, wie er nach unseren Rechnungen und Fig. 6 und 7 zu erwarten ist. Doch sind Unterschiede da, die wohl kaum experimentellen Fehlerquellen zugeschrieben werden können. Als Beispiel hierfür seien die Meßresultate von Bieler an Aluminium in Fig. 9 wiedergegeben. Es ist nicht leicht, aus diesen Resultaten die Werte von q zu bestimmen, die eine befriedigende Darstellung ermöglichen. Für die langsamen α-Teilchen mit der Reichweite 3,4 cm (gestrichelt angegeben) erhält man etwa $q = 0{,}7$, für die schnelleren mit der Reichweite 6,6 cm $q = 2{,}5$. Daraus ergäbe sich für die Polarisierbarkeit des Aluminiumkernes $\alpha = 0{,}37 \cdot 10^{-36}$ cm^3, während eine analoge Auswertung der Messungen an Magnesium $\alpha = 0{,}31 \cdot 10^{-31}$ cm^3 ergibt. Sowohl bei Aluminium als auch bei Magnesium liegen die experimentellen Werte des Verhältnisses V bei den schnellen α-Teilchen merklich tiefer als

die berechneten; dagegen decken sich für die langsamen Teilchen die Meßresultate mit den theoretischen Kurven.

Über ein Wiederansteigen des Verhältnisses V, wie unsere Theorie es bei schnellen α-Teilchen mit zunehmendem Ablenkungswinkel erfordern

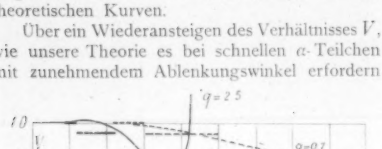


Fig. 9.

würde, liegen noch keine direkten Beobachtungen vor. Dagegen findet sich bei Pettersson (10) die Bemerkung, daß unter 150° bei Aluminium, Magnesium und Kohlenstoff überhaupt keine merkliche Anzahl schneller α-Teilchen reflektiert wird, was wir vielleicht als eine weitere experimentelle Andeutung zugunsten der hier berechneten α-Strahlzerstreuung betrachten dürfen, nach der jenseits eines noch von der Geschwindigkeit des α-Teilchens abhängigen Grenzwinkels nur noch verschwindend wenige α-Teilchen auftreten.

Die experimentellen Resultate von Rutherford und Chadwick liegen nur graphisch vor. Für den Ablenkungswinkel 135° wurde die gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie schon in einer früheren Arbeit (11) ge-

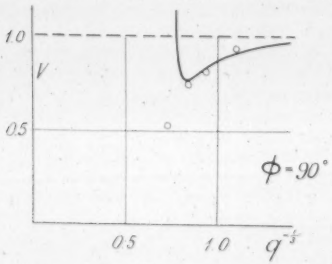


Fig. 10.

zeigt. Zwar liegt auch dort das Minimum des Verhältnisses V mit 0,35 tiefer als der theoretische Wert von 0,47; aber die experimentellen Resultate zeigen durchaus den Verlauf, wie er nach unserer Theorie zu erwarten ist. Insbesondere ist eine Wiederzunahme des Verhältnisses V mit zunehmender Geschwindigkeit der α-Teilchen einwandfrei nachgewiesen.

Für die Messungen unter 90° aber erhält man bei schnellen α-Teilchen wieder Abweichungen, die im gleichen Sinne wie bei den Bielerschen Messungen liegen, während für langsame α-Teilchen die Übereinstimmung eine gute ist. Fig. 10 zeigt die berechnete Kurve und die experimentellen Resultate für Aluminium. Für die Polarisierbarkeit von Aluminium- und Magnesiumkern ergibt sich aus diesen Experimenten

$$a = 0{,}48 \cdot 10^{-36}\ \mathrm{cm}^3 \quad (Al)$$
$$a = 0{,}42 \cdot 10^{-36}\ \mathrm{cm}^3 \quad (Mg)$$

Der Differenz gegenüber den aus den Bielerschen Messungen gewonnenen Resultaten ist kein Gewicht beizulegen, da die Abszissenwerte bei Rutherford und Chadwick bloß graphisch vorliegen und jeder Fehler in der dritten Potenz in a eingeht; wenn man sich die Abszissenwerte aus vereinzelten Angaben über die Reichweite der verwendeten α-Teilchen berechnet, erhält man eher kleinere Werte, die dann mit den nach den Bielerschen Messungen gewonnenen übereinstimmen.

Nach den Überlegungen des zweiten Abschnittes müßten die Polarisierbarkeiten der Atomkerne von der Größenordnung ihres Volumens erwartet werden. Es ist nun wohl von Wichtigkeit, daß dieser Zusammenhang tatsächlich besteht. Wie früher erwähnt, könnte sich daraus vielleicht schließen lassen, daß auch für die Zusammenhangskräfte der Kernbestandteile die Coulombschen elektrostatischen Kräfte in Frage kommen.

14. Man wird versuchen, eine Erklärung für die hier erwähnten Differenzen zwischen Experiment und Theorie zu geben. Eine völlige Übereinstimmung darf allerdings zum Vornherein nicht erwartet werden, wenn man die Bedingungen, unter denen der Experimentator arbeiten muß mit den Voraussetzungen der Theorie vergleicht. Berechnet wurde die Zerstreuung von α-Strahlen bestimmter Geschwindigkeit in einen unendlich kleinen Raumwinkel. Im Experiment hingegen muß, um eine meßbare Ausbeute zu erhalten, ein größerer Winkelbereich gewählt werden; Bieler bestimmt zum Beispiel die α-Teilchenzahlen für einen Winkelbereich von 60°—100°. Ferner ist die Geschwindigkeit des α-Teilchens beim Stoß, die ja allein für die Ablenkung maßgebend ist, verschieden je nach der Tiefe in der Folie, an der der Kerntreffer zustandekommt. Da die Polarisationswirkung, gegeben durch den Parameter q, der 6. Potenz der Geschwindigkeit proportional ist, so könnte auch diese Unbestimmtheit der Geschwindigkeit eventuell merkbar werden.

Doch kann man die erwähnten Unterschiede der experimentellen Resultate gegenüber den berechneten höchstens zu einem kleinen Teil auf Rechnung dieser Umstände setzen. Viel wahrscheinlicher ist, daß eine oder auch mehrere der gemachten Voraussetzungen nicht vollständig erfüllt sind. So machen es zum Beispiel Messungen von Pettersson (12) über die Reichweite der gestreuten α-Teilchen wahrscheinlich, daß bei den Stoßvorgängen unter Umständen mehr Energie auf den Kern übertragen wird, als nach den Gesetzen des elastischen Stoßes zu erwarten wäre. Man kann versuchen, auf Grund einer ganz rohen Überlegung den Einfluß solcher unelastischer Stöße abzuschätzen. Nach Pettersson (13) könnte ein Energieverlust des α-Teilchens als Bremsung im Kernfeld angesehen werden, etwa dadurch hervorgerufen, daß sich das elektrische Moment des Kernes nicht momentan, sondern mit einer gewissen Phasenverschiebung gegenüber der wirksamen Feldstärke einstellt. Das anziehende elektrische Moment des Kernes wäre dann im Mittel beim Herannahen des α-Teilchens kleiner als beim Wegfliegen, woraus eine Bremswirkung resultieren würde. Die Möglichkeit einer solchen endlichen Phasenverschiebung zwischen Feldstärke und Induktion wäre verständlich, da die Zeit der wirksamen Beeinflussung des Kernes von der Größenordnung der mutmaßlichen Umlaufszeit der Kernbestandteile ist.

Hiernach würde das α-Teilchen auf dem 2. Teil seiner Bahn eine kleinere Geschwindigkeit besitzen und daher unter dem Einfluß der abstoßenden Kernladung eine größere Ablenkung erfahren. Merkbar würde ein solcher Effekt seiner Natur nach erst, wenn die Polarisation stark geworden ist; die Kurven $\delta(\varphi_0)$ in Fig. 5 würden dann bei großem Ablenkungswinkel und schnellen α-Teilchen weniger steil verlaufen und der daraus resultierende kleinere Wert von $\frac{d\delta}{d\varphi_0}$ ergäbe nach (23) eine Verkleinerung der früher gefundenen Werte von V im Gebiete des Beginns der unelastischen Stöße. Ob hierin eine Erklärungsmöglichkeit für Unterschiede zwischen Experiment und Rechnung liegt, können nur Beobachtungen über Energieverluste der α-Teilchen bei verschiedenen Ablenkungen lehren.

Eine Ergänzung der vorliegenden Rechnung wäre noch in einer anderen Richtung möglich. Sobald man den Heliumkern als ein komplexes Gebilde betrachtet, wird eventuell auch ihm eine gewisse Polarisierbarkeit zugeschrieben werden müssen. Wie die Rechnung zeigt, setzt sich in erster Näherung die Wirkung dieser gegenseitigen Polarisation additiv aus den einfachen Wirkungen zusammen. Der Nachweis der Verschiebungsmöglichkeit von elektrischen Ladungen im α-Teilchen läßt sich daher aus den bisher bekannten experimentellen Tatsachen nicht erbringen. Für eine Entscheidung hierüber müßten Messungen durchgeführt werden, bei denen Heliumkerne zu gegenseitiger Wirkung gelangen, also Bestimmungen der α-Strahlzerstreuung beim Durchgang durch Helium.

Bei einer genaueren Berechnung der gegenseitigen Polarisationswirkung, wie sie bei größerer Annäherung nötig würde, müßten noch zusätzliche Abstoßungskräfte berücksichtigt werden, die der achten Potenz des Abstandes der beiden Gebilde umgekehrt proportional sind. Nach ähnlichen Überlegungen wie bei der Berücksichtigung der unelastischen Stöße würde die dadurch hervorgerufene Vergrößerung der Ablenkung wiederum zuerst zu einer weiteren Abnahme des Verhältnisses V der α-Teilchenzahlen mit und ohne Polarisationswirkung vor dem endgültigen Wiederansteigen führen.

Doch sind alle diese Berücksichtigungen von möglicherweise noch wirksamen Nebenumständen nur weitere Näherungen, die den Verlauf der α-Strahlzerstreuung, wie er aus der einfachen Annahme der Polarisierbarkeit des Atomkernes hervorgeht, nicht mehr wesentlich zu ändern vermögen. Als Hauptergebnis der ganzen Rechnung dürfen wir daher vielleicht die Tatsache betrachten, daß es auf Grund der Annahme einer Verschiebungsmöglichkeit der Kernladungen möglich ist, die bisher bekannten Experimente über anomale Zerstreuung von α-Strahlen im wesentlichen zu deuten, ohne neue, unbekannte Kräfte oder eine spezielle Struktur des Kernes voraussetzen zu müssen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. Debye möchte ich hier noch meinen herzlichsten Dank aussprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und das Interesse, das er ihr stets entgegenbrachte.

Literaturverzeichnis.

1) E. Rutherford, Phil. Mag. **21**, 669, 1911.
2) H. Geiger u. E. Marsden, Phil. Mag. **25**, 604, 1913.
3) J. Chadwick, Phil. Mag. **40**, 734, 1920.
4) E. S. Bieler, Proc. Roy. Soc. A. **105**, 434, 1924.
5) E. Rutherford u. J. Chadwick, Phil. Mag. **50**, 889, 1925.
6) P. Debye u. W. Hardmeier, Physik. Zeitschr. **27**, 196, 1926.
7) E. S. Bieler, Proc. Cambridge Phil. Soc. **21**, 686, 1923.
8) W. Wessel, Ann. d. Physik **78**, 757, 1925.
9) C. G. Darwin, Phil. Mag. **17**, 499, 1914.
10) H. Pettersson, Wien. Ber. (IIa) **133**, 510, 1924.
11) W. Hardmeier, Physik. Zeitschr. **27**, 574, 1926.
12) G. Kirsch u. H. Pettersson, Wien. Ber. (IIa) **134**, 501, 1926.
13) H. Pettersson u. G. Kirsch, Atomzertrümmerung, S. 188.

Zürich, den 17. Januar 1927.

(Eingegangen 24. Januar 1927.)

Zur Theorie der Wirbel.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von Joh. Dejmek.

Wer die Wirbel, die sich bei gewissen Gelegenheiten an der Oberfläche von Flüssen und Gerinnen zeigen, beobachtet hat, wird zugeben, daß sie mit den Wirbeln der theoretischen Hydrodynamik nur den Namen gemeinsam haben. Was die Hydrodynamik als Wirbel bezeichnet, ist ja lediglich eine Flüssigkeitsbewegung bei Abwesenheit eines Geschwindigkeitspotentials: curl $v \neq 0$. In der Meteorologie findet man den Ausdruck „Wirbel" als Bezeichnung für rotierende Luftmassen. — Was den Mechanismus der Wirbelbildung in Gerinnen anbetrifft, so ist man wohl auf dem richtigen Wege; mathematisch aber konnte man die Vorgänge noch nicht erfassen. Jedenfalls aber wird man sich die wirklich auftretenden Wirbelerscheinungen zum Vorbild nehmen müssen.

1. Erfahrungsgrundlagen.

Die prägnantesten Erscheinungen, die man bei solchen Wirbelbildungen beobachten kann, sind wohl der Wirbelschweif und die Trichterbildung. Zuweilen treten auch Wirbelzwillinge auf, die entgegengesetzten Drehungssinn haben. Bekannt ist weiterhin das Vergehen der Wirbel, für das die innere Reibung verantwortlich gemacht wird. Mit zunehmender Zähigkeit nimmt die Fähigkeit der Flüssigkeit, Wirbel zu bilden, ab[1]).

Man kann eine ganze Reihe von Beobachtungen anführen, welche alle auf denselben Mechanismus der Wirbelbildung hinweisen. Es seien einige Beispiele angeführt.

So kann man beobachten, daß sich in Gerinnen und Flüssen längs der beiden Ufer eine — verhältnißmäßig schmale — Prandtlsche Grenzschicht ausbildet, während in dem dazwischen liegenden Teile — dem Kern — die Flüssigkeit mit fast gleichförmiger Geschwindigkeit strömt. (Man kann diese deutliche Trennung der genannten Teile gut beobachten, wenn man auf die Lichtreflexion an ihrer Oberfläche achtet.) Die Übergangszone zwischen der Grenzschicht und dem Kern zeigt sich nun begleitet von Wirbeln, die in den Bewegungsunterschieden der genannten Gebiete ihre Ursache haben. Diese Wirbel durchziehen in Querbewegungen auch Teile des Kerns.

In den Fig. 2, 3 und 4 sind Lichtbilder von Wirbeln wiedergegeben, die eine ähnliche Entstehungsursache haben[1]). Ihr Entstehungsort liegt in den Unstetigkeitsflächen zwischen zwei Flüssigkeitsgebieten, die sich parallel zur vorderen Schütze (v. S.) bzw. zur seitlichen Schütze (s. S.) ausbilden. In Fig. 1 ist das Beobachtungsobjekt mit den beiden aufeinander senkrecht stehenden Schützen dargestellt. Es strömt Wasser von der vorderen Schütze weg und stößt auf die von links kommende Wassermasse (Unstetigkeitsfläche parallel zur vorderen

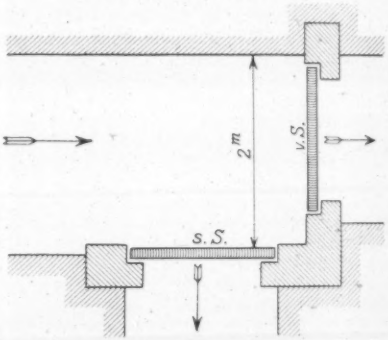


Fig. 1.

Schütze) und ähnlich für die seitliche Schütze (Fig. 2 und 4)[2]). Fig. 3 zeigt einen Wirbelzwilling, der längs der vorderen Schütze wandert. Bemerkenswert ist in den Fig. 2 und 4 der ausgeprägte Wirbelschweif! Diese beiden Lichtbilder zeigen m. E. sehr deutlich die Aufrollung der Unstetigkeitsfläche zum Wirbel. Ich sehe in dem Wirbelschweif das Verbindungsglied zwischen dem Wirbelkopf und der in Aufrollung begriffenen Unstetigkeitsfläche. Daß sich in Fig. 4 der Wirbelkopf senkrecht zur Unstetigkeitsfläche stellt — und in dieser Richtung wandert er weiter — ist auf die Ablenkung an der vorderen Schütze zurückzuführen. In Fig. 2 ist die Tendenz der Ablenkung ebenfalls zu bemerken. Es stimmt aber die Ablenkung mit dem Drehungssinn überein! (Ähnliche Beobachtungen kann man beim Helmholtzschen Ex-

1) Historisch bemerkenswert ist das Beispiel, das Helmholtz anführt: Bewegt man einen etwas eingetauchten Löffel in einer Schale Kaffee und zieht ihn spontan heraus, so bemerkt man zwei Wirbel mit entgegengesetztem Drehungssinn, die auf der Oberfläche zurückbleiben. — Macht man dasselbe Experiment z. B. mit Johannisbeersaft, den man zu Gelee einkochen will, so wird man die Erscheinung anfänglich auch bemerken; je weiter aber die Zähigkeit mit dem Eindampfen zunimmt, desto mehr bleibt die Wirbelbildung aus.

1) Die Wirbel der Lichtbilder hat der Verfasser bereits im Jahre 1922 aufgenommen. Zur Anwendung kam die Ahlbornsche Methode des aufgestreuten Lykopodiums.

2) Die beiden Schützen waren nur zum Teil aufgezogen.

Fig. 2. Unstetigkeitsfläche parallel zur vorderen Schütze.

periment machen, wo die beiden Wirbel schließlich entlang der Schalenwand treiben.)

Noch eindrucksvoller gestalten sich derartige Wirbelbildungen z. B. bei Raddampfern, wo jede Schaufel des Rades eine gewisse Wassermenge entgegen der Stromrichtung schleudert. Man kann hier wieder beobachten, daß längs der Unstetigkeitsfläche zwischen dieser, von dem Rade fortgeschleuderten, Wassermasse und dem übrigen Stromgebiete Wirbel treiben, und zwar in ziemlich gleichmäßigen Abständen, entsprechend der gleichförmigen Bewegung der Schaufeln.

Alle diese aufgeführten Beobachtungen weisen auf die gleiche Entstehungsweise von Wirbeln hin: Die Unstetigkeitsfläche, hervorgerufen durch Bewegungsunterschiede zweier nebeneinander befindlicher Flüssigkeitsgebiete, rollt sich zu Wirbeln auf[1]).

Es kommt nur auf die Bewegungsunterschiede der beiden durch die Grenzfläche voneinander geschiedenen Flüssigkeitsgebiete an. Diese müssen nicht nach entgegengesetzten Richtungen strömen; man beobachtet vielmehr auch dann noch, wenn die (mittleren) Geschwindigkeitsvektoren gegeneinander gerichtet sind, die Wirbelbildung.

Es sei hier noch an das Zyklonenproblem der österreichischen und skandinavischen Meteorologenschule (F. M. Exner und V. Bjerknes) erinnert. Im Prinzip der modernen Zyklonentheorie liegt ja die Annahme einer Grenzfläche zwischen der kalten Westdrift und der warmen Ostdrift (Helmholtz, Margules), die in der Bjerknesschen Polarfront ihren prägnantesten Ausdruck fand. Es ist aber unbestimmt, ob allein aus der Aufrollung dieser Grenzflächen die Zyklonenbildung beschrieben werden kann; es müßten vielmehr, wie Herr Exner meint, die

Fig. 3. Wirbelzwilling; wandert längs der vorderen Schütze.

thermischen Unterschiede mit berücksichtigt werden, so daß die dynamische und die thermische Ursache zusammen die Zyklonenbildung bewirken[1]).

1) Man kann im allgemeinen beobachten, daß längere Diskontinuitätsflächen sich an mehreren Stellen zu Wirbeln aufrollen. Es erscheinen vielfach kleinere und größere Wirbel, und man kann sehen, daß kleinere Wirbel in größere aufgehen.

1) Vgl. etwa F. M. Exner, Meteorol. Zeitschr. 1922, S. 73 und Referat von H. v. Ficker, ebenda 1923, S. 65, wo die einschlägige Literatur zusammengestellt ist.

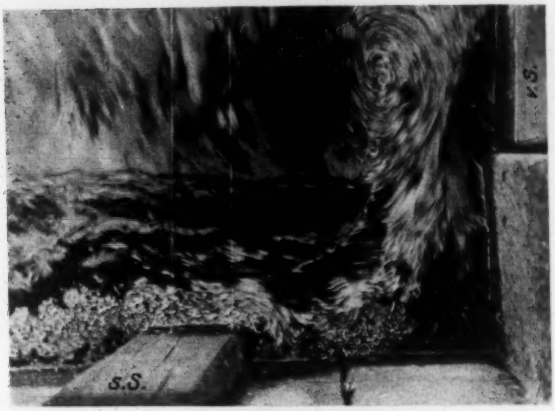


Fig. 4. Unstetigkeitsfläche parallel zur seitlichen Schütze.

Unter Bewegungsunterschieden verstehe ich Unterschiede im Bewegungszustande der beiden Flüssigkeitsgebiete. Beim Übergang von einem Gebiete zum andern treten Sprünge in den den Bewegungszustand charakterisierenden Größen auf.

2. Bemerkungen zur Turbulenz.

Offenbar will die Natur durch die Wirbelbildung etwas erreichen. Diesem Zweck dürfte die Annahme gerecht werden, daß das Nebeneinander von zwei Flüssigkeitsgebieten, denen Bewegungsunterschiede anhaften, etwas Unstabiles ist. Der Wirbel, der durch Aufrollung der Grenzfläche entsteht, sucht nun — vermöge seiner Drehung zwischen beiden Flüssigkeitsgebieten — die Bewegungsunterschiede auszugleichen und einen beständigen Zustand zu vermitteln.

Hier seien einige Bemerkungen über die Turbulenz eingeschaltet. Man weiß, daß bei turbulenten Strömungen die Geschwindigkeitsverteilung im Kern die ausgeglichene Form der Fig. 5 zeigt. Zunächst ist die etwas schärfere Abbiegung der Turbulenzkurve dadurch bemerkenswert, daß sie gerade am Orte (G) der Grenzfläche zwischen Kern und Grenzschicht auftritt. (Die Geschwindigkeit nimmt — vom Ufer herkommend — entgegen der laminaren Parabel fast nicht mehr zu.) Wie wir wissen, treten gerade hier Wirbelbildungen auf. Sie durchziehen auch Teile des Kerns. Dies sind aber nicht die einzigen Wirbel, die gebildet werden. Man kann nämlich beobachten, daß leichte organische Teilchen (im Innern der Flüssigkeit) zwar in der Stromrichtung mitgenommen werden, aber überdies noch ganz unregelmäßige (darüber gelagerte) Bewegungen ausführen. Außerdem bemerkt man im Kern ganz plötzlich Wirbel treiben. Solche zusätzliche Bewe-

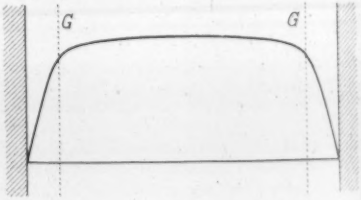


Fig. 5.

gungen der Teilchen dürften von Wirbeln herrühren, die ihrerseits mit Aufrollungen von Unstetigkeitsflächen ursächlich zusammenhängen. Und da die Wirbel nach der obigen Annahme bestrebt sind, den Ausgleich der Bewegungsunterschiede herbeizuführen, dürften sie für die ausgeglichene Turbulenzkurve verantwortlich sein.

Brünn, Dezember 1926.

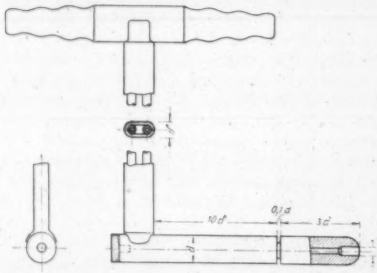
(Eingegangen 22. Dezember 1926.)

Berichtigung zu Band 2 des „Handbuchs der Physik".

Von L. Prandtl.

Zu der Abhandlung von Herrn Niesiołowski-Gawin über Geschwindigkeitsmessung seien mir die folgenden berichtigenden Bemerkungen über zwei Meßgeräte zur Luftgeschwindigkeitsmessung, die mit meinem Namen verknüpft sind, gestattet. In Kap. 7, Artikel 17, S. 307 wird eine „Stauscheibe von Prandtl" erwähnt und in Abb. 13 schematisch dargestellt. Mit dieser Stauscheibe hat es die folgende Bewandtnis: Ich hatte zu einer Zeit, als nur die Recknagelsche Stauscheibe als Gerät für die Luftgeschwindigkeitsmessung bekannt war, die Aufgabe, die Geschwindigkeit von Luftströmen zu messen, die viel Sägespäne und Staub mit sich führten und daher die Löcher der Stauscheibe sehr schnell verstopften. Ich habe damals, um mir zu helfen, eine kreisrunde Blechscheibe vorn und hinten mit einem eng anliegenden bis zum Kreismittelpunkt führenden Röhrchen versehen und die Rohrenden noch gegen die Scheibe zu abgebogen, so daß zwar die Luft in die Röhrchen eindringen konnte, Späne und Staub aber nicht. Dieses an sich praktische, aber naturgemäß nicht sehr genaue Gerät ist dann gelegentlich von einem damaligen Mitarbeiter in Worten beschrieben worden. Ein anderer hat aus der Wortbeschreibung eine Zeichnung gemacht, die mit dem Gerät nur noch gewisse grundlegende Züge gemein hatte und ein dritter hat diese Zeichnung in „Luegers Lexikon der gesamten Technik" gebracht, von wo sie der Herr Referent entnommen hat. In Wirklichkeit habe ich selbst niemals besonderen Wert auf dieses Gerät gelegt und es ist in der Tat ja auch längst durch bessere und zweckmäßigere ersetzt, darunter das nach mir benannte Staugerät.

Dieses Staugerät wird von Herrn v. Niesiołowski-Gawin ebenfalls erwähnt (Artikel 14 desselben Kapitels u. Abb. 8, S. 299), aber es ist in der Zeichnung ein falsches Maß untergelaufen, weshalb es mir erlaubt sei, hier eine Zeichnung mit richtigen Maßen wiederzugeben, die den „Regeln für Leistungsversuche an Ventilatoren und Kompressoren", herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure, 2. Auflage 1926, VDI-Verlag, entlehnt ist. Diese „Regeln" sind, wie ich sonst bemerken möchte, eine nicht unwichtige Quelle für Literatur auf dem Gebiet der Luftgeschwindigkeits- und Luftmengenmessung. In der beanstandeten Figur im Handbuch der Physik steht statt des Maßes $10\,\delta$ fälschlicherweise $10\,d$. Dieses Maß steht in Beziehung zu dem Stau, den der Stiel des Instruments (Dicke δ) an dem Meßschlitz verursacht und ist daher der Stieldicke proportional zu setzen. Ferner ist das Maß $0{,}3\,d$, das sich auf die vordere Bohrung bezieht, in der erwähnten Figur nicht klar genug eingeschrieben. Zu dem Instrument mag noch erwähnt werden, daß es durch Einbringung eines kleinen Wattebausches in die vordere Höhlung auch für Staubluft geeignet wird. Nach Lösung der hinten angebrachten Schraube läßt sich der Wattebausch durch einen hindurchgeführten Draht wieder herausstoßen.



Staugerät nach Prandtl.

Göttingen, im Dezember 1926.

(Eingegangen 24. Dezember 1926.)

Über die Dielektrizitätskonstanten von Elektrolytlösungen bei geringen Konzentrationen.

Von H. Sack.

Die experimentellen Bestimmungen der DK[1]) von Elektrolytlösungen sind in kleiner Zahl, auch stimmen die Ergebnisse der einzelnen Forscher sehr wenig untereinander überein. Immerhin dürfte es heute als gesichert angesehen werden, daß eine Erniedrigung der DK beim Auflösen eines starken Elektrolyten eintritt, wenigstens solange es sich um kleine Konzentrationen handelt. Verglichen mit der Abnahme, die beim Auflösen eines Nichtelektrolyten auftritt, ist die der Elektrolyte eine große. Eigene Messungen wässeriger Elektrolytlösungen, über die im ersten Teil dieser Arbeit berichtet

1) In dieser Arbeit wird immer für das Wort Dielektrizitätskonstante in Ein- und Mehrzahl die Abkürzung DK verwendet werden.

werden soll, führen zu demselben Ergebnis. Eine theoretische Erklärung für dieses Verhalten wurde schon von Blüh (1) und Walden (12) gegeben. Beide stützen sich auf die Dipoltheorie der Dielektrika. Diese Theorie unterscheidet bekanntlich zwischen einer „optischen" und einer „statischen" DK ein und derselben Substanz. Für die optische ist die Polarisation durch Verschiebungselektronen verantwortlich. Sie tritt bei allen Substanzen auf und genügt der Maxwellschen Beziehung. Des weiteren ist ihre Polarisation der angelegten Feldstärke proportional. Die Polarisation, die die statische DK liefert, beruht außer auf Verschiebungselektronen noch auf dem Richten von bereits fertigen elektrischen Dipolen im äußeren Felde. Dieser zweite Anteil ist nur für kleine Feldstärke ihr proportional, für größere Felder nähert er sich asymptotisch einem endlichen Werte. Infolgedessen ist für eine solche Dipolsubstanz die DK von der Feldstärke abhängig und sinkt für unendlich große Felder auf den optischen Wert. Es ist Herweg (7) gelungen, wenigstens den Beginn dieser Sättigungserscheinung experimentell nachzuweisen. Die Erklärung ist die, daß in kleinen Feldern die Drehung der Dipole der richtenden Feldstärke proportional ist, in großen jedoch sind die Dipole schon vollkommen gerichtet, und eine Erhöhung des Feldes kann dann keine weitere Drehung mehr und damit keine Zunahme der Polarisation bewirken. Allerdings sind die zur Sättigung nötigen Feldstärken sehr groß. Solche Felder herrschen nun in der Nähe der Ionen. Dort werden also die Dipole gerichtet sein, und sie werden durch ein kleines äußeres Feld nicht gedreht werden können. Für ein solches Feld hat dann die DK dieser Umgebung des Ions nur den optischen Wert. Es sähe dann so aus, als ob sich in einem Medium mit bestimmter DK Löcher von kleinerer DK befänden. Das würde eine Erniedrigung der DK des ganzen Gebildes bewirken. Von diesem Gebilde ausgehend berechnen Walden und seine Mitarbeiter (12) den Radius dieser „Löcher" vollkommener dielektrischer Sättigung. Sie finden Werte von ca. 16 Å für KCl-Lösungen in Wasser. Dies sind wohl viel zu große Werte, in solchen Abständen sind die Dipole noch lange nicht gerichtet. Der angegebene Wert hat nur eine Anschauungsbedeutung, es ist, als ob Löcher von diesem Radius im Lösungsmittel wären, eine reelle physikalische Bedeutung haben diese Zahlen nicht. Blüh (1) geht etwas anders vor. Er versucht, den Radius der Kugel, innerhalb deren das Dielektrikum vollkommen gesättigt ist, Messungen über Ionenbeweglichkeiten zu entnehmen und setzt für ihn den Wert des „scheinbaren Radius" in Borns (3) Arbeit über Ionenbeweglichkeit. Die dort durchgeführten Rechnungen sind bereits von Schmick (10) kritisiert worden. Er zeigt, daß die scheinbaren Ionenradien nicht mit dem Radius der Sättigungssphäre identisch sind. Der prinzipielle Fehler jedoch, der beiden Betrachtungsweisen gemein ist, ist der, daß wir von einer fest begrenzten Sättigungssphäre gar nicht reden können. Schon eine teilweise Sättigung bewirkt eine Erniedrigung der DK. Wir werden sogar sehen, daß die Gebiete sehr geringen Sättigungsgrades den Hauptteil zur gesamten Erniedrigung der DK der Lösung beitragen. Im zweiten Teil dieser Arbeit soll nun gezeigt werden, daß man unter Zugrundelegung eines stetigen Überganges der Sättigung nach einfachen elektrischen Gesetzen die experimentell gefundenen Werte der Größenordnung nach rechnerisch finden kann. Ein Teil der Rechnung ist bereits früher veröffentlicht worden (9), es war nicht zu vermeiden, hier den größten Teil des dort Gesagten zu wiederholen.

I. Experimenteller Teil.

1. Zur Messung der DK wurde eine modifizierte Nernstsche Brückenanordnung verwendet. Es wurde diese Methode gewählt, da sie uns besonders übersichtlich schien. Bei der benutzten Frequenz von 2 Millionen Schwingungen pro Sekunde darf noch die gewöhnliche Wechselstromrechnung angewandt werden. Es sind keine Korrektionen nötig, die oft das Resultat verwischen. Diesen Vorteilen steht allerdings die Unmöglichkeit, Flüssigkeiten mit höherer Leitfähigkeit zu messen, als Nachteil gegenüber. Man kann durch Erhöhen der Frequenz den ungünstigen Einfluß der Leitfähigkeit bis zu einem gewissen Grade unterdrücken, aber dann treten bald um so größere Schwierigkeiten in der Apparatur auf. Eine Nernstsche Brücke, die mit sehr hochfrequentem Strome betrieben wird, ist äußerst empfindlich gegen kleine Änderungen, die in der Umgebung der Apparatur auftreten und erschwert so das exakte Arbeiten außerordentlich. Meines Wissens ist man noch nicht weiter als bis zu einer Frequenz von 100 Millionen geschritten, und schon dort müssen alle Teile der Apparatur in geerdete Gehäuse eingeschlossen werden. Aber auch dann müssen bei Leitfähigkeiten von über 1 bis $2 \cdot 10^{-4}$ Ω^{-1} cm noch Kompensationswiderstände benutzt werden. Wie wir später zeigen werden, ist es überhaupt fraglich, ob man mit Kompensationswiderständen weiter als bis zur oben angegebenen Leitfähigkeit messen kann. Da in diesem Bereiche unsere Apparatur mit kleinerer Frequenz noch vollkommen sicher arbeitet und uns von theoretischen Gesichtspunkten aus nur kleine Kon-

zentrationen interessieren, nahmen wir von der Wahl einer höheren Frequenz Abstand. Da die Brückenanordnung schon sehr weitgehend von verschiedenen Forschern (2) ausgebaut worden ist, wollen wir hier nur die wichtigsten Punkte besprechen und im übrigen auf jene Arbeiten verweisen.

Die Stromquelle bestand aus einem Elektronenröhren-Schwingungskreis. Der Strom wurde mittels induktiver Kopplung in den Brückenkreis geleitet. Generator und Brückenkreis waren möglichst weit räumlich getrennt, um eine direkte Einwirkung des Schwingungskreises auf die Brückenteile zu vermeiden. Der Brückenkreis bestand aus 4 etwa gleich großen Kapazitäten. Zwei davon waren Präzisions-Drehkondensatoren, die in geerdete Hüllen eingebaut waren. Zur Stromanzeige in der Brücke diente ein Kristalldetektor mit Galvanometer, das durch einen induktions- und kapazitätsfreien Widerstand auf Aperiodizität geshuntet war. Die ganze Anordnung war möglichst symmetrisch aufgebaut. Der Brückenkreis war ungefähr auf den Schwingungskreis abgestimmt. Für Messungen mit Leitfähigkeiten wurden den beiden Drehkondensatoren je ein Widerstand parallel geschaltet, von denen der eine fest, der andere veränderlich war. Der Kondensator, in dem die Flüssigkeit untersucht wurde, hatte die in der Fig. 1 angegebene Form. Die Platten bestanden aus vernickeltem Nickel. Die Zuführungsdrähte lagen in weiten Glasröhren, die fest im Deckel des großen Glasgefäßes verkittet waren. Durch eine solche Anordnung wird die Kapazität der Zuführung außerordentlich verringert. Die Dimensionierung kann leicht so gewählt werden, daß die Kapazität der Zuführung gegen die des gefüllten Kondensators zu vernachlässigen ist. Um die Branchbarkeit des Kondensators zu prüfen, wurde mit ihm, ohne Verwendung von Kompensationswiderständen, die DK von reinem Wasser bestimmt. Als Eichsubstanz fand Azeton Verwendung, dessen DK mit einem andern Kondensator absolut bestimmt worden war. Bei 18° C wurde der Wert $80{,}85 \pm 0{,}08$ gefunden, in guter Übereinstimmung mit den Werten anderer Beobachter. Die Messungen an Elektrolytlösungen wurden alle relativ zu diesem Werte durchgeführt.

Bei der Messung wurde so verfahren, daß der gesamte Widerstand und die gesamte Kapazität in jedem der 4 Brückenzweige konstant blieben, d. h. der Meßkondensator wurde dem einen Drehkondensator parallel geschaltet und dann die Kapazitäts- und Widerstandsänderung durch Verstellen des Präzisionskondensators bzw. des Kompensationswiderstandes dieses Brückenzweiges kompensiert. Man kann dann direkt am Drehkondensator die Änderung der Kapazität ablesen. Dieses Vorgehen bietet den Vorteil, daß während der ganzen Messung die Abstimmung erhalten bleibt, ebenso die Einwirkung auf den Generator. Wellenlängen- und Intensitätsschwankungen waren von dieser Seite her nicht zu befürchten. Im übrigen wurde die Wellenlänge des öfteren mit einem Wellenmesser geprüft. Zur weiteren Kontrolle konnte der Meßkondensator auch dem zweiten Drehkondensator parallel geschaltet werden.

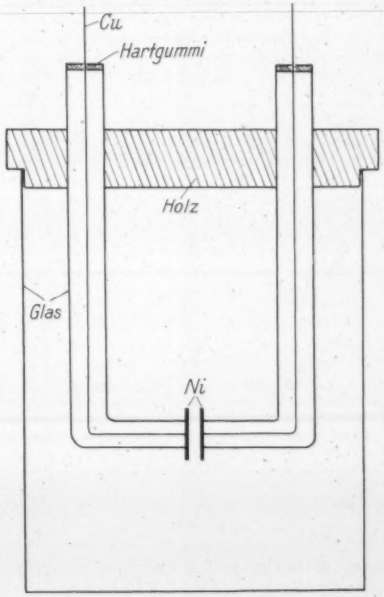


Fig. 1.

Die Bestimmung der Stellung des Drehkondensators, für den die Brücke stromlos war, geschah so, daß für zwei gleiche Galvanometerausschläge nach verschiedenen Seiten die Stellung des Kondensators abgelesen und von den beiden Werten das arithmetische Mittel genommen wurde. Für eine Nullstellung nahmen wir immer 3 bis 6 solcher Paare auf. Dies Verfahren ist nur zulässig, wenn die Kurve, die die Abhängigkeit des Galvanometerausschlages von der Kapazitätsänderung von der Nullstellung aus darstellt, vollkommen symmetrisch ist. Da Gesamtkapazität und Gesamtwiderstand jedes Brückenzweiges konstant bleiben, ist die Empfindlichkeit der Apparatur, d. h. die Form jener

Kurve, unabhängig von der jeweiligen Einstellung von Kondensator und Widerstand. Liefert der Generator stets dieselbe Energie, so muß die Kurve während der ganzen Messung dieselbe bleiben. Wie weit dies erreicht wurde, zeigt die folgende Fig. 2. Als Abszisse ist die Kapazitätsänderung von der Nullstellung aus eingetragen, wobei diese Stellung in der oben angegebenen Weise gefunden wurde. Die Ordinate stellt den Galvanometerausschlag in Zentimetern dar. Es bezeichnen: ○ Messungen zu Beginn einer Meßreihe mit leerem Meßkondensator, ● solche wenige Minuten später mit Elektrolytlösung stärkster Konzentration, ⊕ endlich solche zwei Stunden später mit reinem Wasser. Die Ablesegenauigkeit betrug $^1/_{20}$ Skalenteile $= {}^1/_{2000}$ der Kapazität des gefüllten Meßkondensators. Die Symmetrie der Kurve läßt nichts zu wünschen übrig. Sollen die Messungen eindeutig sein, so muß der Strom in der Brücke vollkommen null gemacht werden können. Es wurde stets kontrolliert, daß das der Fall war.

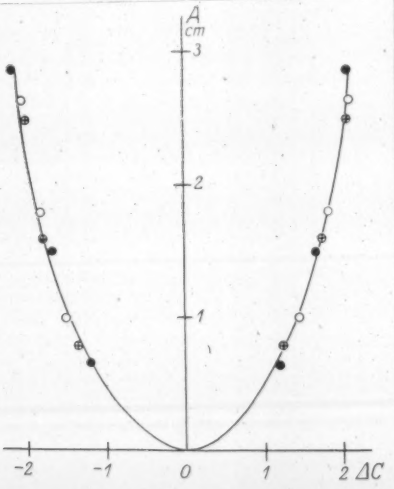


Fig. 2.

Alle Teile der Apparatur waren so angeordnet, daß sie von dem ca 2 m entfernten Beobachtungsorte aus bedient werden konnten. Es war dann kein Einfluß des Beobachters auf die Apparatur mehr zu merken.

2. Besondere Sorgfalt wurde auf die Konstruktion der Kompensationswiderstände verwandt. Sie bilden den Teil der Apparatur, durch den sich am leichtesten Fehler einschleichen können. Die Hauptforderung, die an sie gestellt werden muß, ist die, daß beim Ändern des Widerstandes keine Kapazitätsänderung eintritt. Dabei ist zu beachten, daß es sich um große Widerstandsänderungen, nämlich solche auf den 100- bis 1000fachen Wert, handelt. Für die in Betracht kommende Größenordnung stehen nur Flüssigkeitswiderstände zur Verfügung. Ihrer Konstruktion lagen folgende Überlegungen zugrunde: Denken wir uns einen Flüssigkeitswiderstand, so können wir die Größe des Ohmschen Widerstandes entweder durch Änderung der spez. Leitfähigkeit oder durch Ändern der Elektrodenform variieren. Dadurch werden gewisse Kapazitätsänderungen bedingt sein, die wir gesondert abschätzen wollen. Ändern wir die spez. Leitfähigkeit, z. B. durch Ändern der Konzentration im Falle einer wässerigen Salzlösung, so variiert gleichzeitig die DK des Mediums und dadurch die Kapazität des Systems. Denken wir uns zwei Elektroden vollständig von einer Flüssigkeit der DK ε und der spez. Leitfähigkeit λ umgeben, so daß sämtliche Kraftlinien in ihr verlaufen, so besteht zwischen der Kapazität, abgesehen von der gegen Erde, und dem Ohmschen Widerstande die Beziehung:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi\lambda} = C \cdot W.$$

Der minimale Widerstand ist durch den des Meßkondensators vorgeschrieben. Die Kapazität soll höchstens $^1/_{1000}$ der des gefüllten Meßkondensators betragen. Man muß also ein Medium finden, für das $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ den so bestimmten Wert hat. Nehmen wir an, daß die DK einer gesättigten Salzlösung nicht mehr als ca. 50 Proz. von der des reinen Wassers abweicht, so erfüllt sie die gestellten Bedingungen. Bei einer spez. Leitfähigkeit von ca. $2 \cdot 10^{-4}$ der zu messenden Flüssigkeit würde ein Hilfswiderstand mit gesättigter *NaCl*-Lösung etwa eine Kapazität gleich $^1/_{2000}$ der des gefüllten Meßkondensators besitzen. Bei der praktischen Ausführung ist es jedoch nicht möglich, die Bedingung des vollständigen Umgebenseins der Elektroden von dem Medium zu erfüllen. Sollen die Abmessungen des Widerstandes nicht zu groß werden, so muß man einen relativ schmalen Flüssigkeitskanal herstellen. Dann liegen die Verhältnisse viel komplizierter, und man kann nicht mehr die obige Formel streng anwenden. Es ist jedoch nicht zu erwarten, daß sehr große Abweichungen von der errechneten Größenordnung der Kapazität eintreten werden.

Eine Änderung der Kapazität des Hilfswiderstandes kann auch beim Verändern der Elek-

trodenform, z. B. beim mehr oder weniger tiefen Eintauchen von Drähten, auftreten. Dabei ändert sich nämlich der Potentialverlauf wesentlich. Untersuchen wir z. B. den Potentialabfall längs der Flüssigkeit, so ergibt ein idealer Plattenkondensator das in Fig. 3, Kurve 1 dargestellte Bild, während es für eine feine Spitze gegenüber einer Platte ungefähr den in Kurve 2 gezeichneten Verlauf hat. Eine rechnerische Abschätzung des Effektes war nicht möglich, der Einfluß wurde daher experimentell untersucht, indem zwei ganz verschiedene Potentialverläufe hergestellt wurden, und die dabei auftretende Kapazitätsänderung gemessen wurde. Das geschah z. B. so, daß der Widerstand einmal im gewöhnlichen Zustande (ungefähr Kurve 3) und dann mit einem Draht, der von der einen Elektrode bis in die Mitte des Gefäßes reichte (ca. Kurve 4), gemessen wurde. Bei den zur definitiven Messung gelangten Gefäßen war dabei die Kapazitätsänderung kleiner als 0,1 Proz.

Die verwendeten Kompensationswiderstände wurden durch Ändern der Konzentration unge-

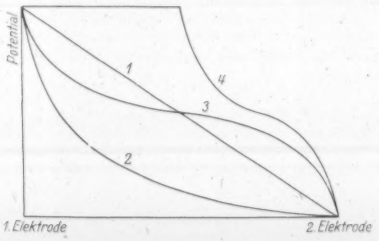


Fig. 3.

fähr auf die richtige Größe gebracht, indem ihr Ohmscher Widerstand in einer mit 50 periodigem Strom betriebenen Wheatstoneschen Brücke gemessen wurde. Die feinen Änderungen, die noch übrig blieben, wurden durch Ändern der Elektroden erreicht. Es kamen 3 Typen zur Verwendung: a) zwei feine *Pt*-Drähte, die mehr oder weniger eingetaucht werden konnten, b) zwei *Ag*-Platten, von denen die eine aus der Flüssigkeit hinausgedreht werden kann, c) analog a, nur wurde hier die Flüssigkeitshöhe reguliert. Die Änderungen des Ohmschen Widerstandes, die so vorgenommen werden können, sind nur sehr klein. Eine kleine Kontrolle der Zuverlässigkeit dieser Hilfswiderstände bestand in der Möglichkeit, daß in einem kleinen Bereiche die Widerstandsänderung durch Konzentrations- oder Elektrodenänderungen erreicht werden konnte. Wir haben keine systematischen Abweichungen gefunden. Ebenso stimmten die Ergebnisse, die mit den verschiedenen Gefäßen gefunden wurden, untereinander gut überein.

3. Die Salze wurden von Kahlbaum bezogen, aber nicht weiter gereinigt. Die Konzentration wurde durch chemische Analysen nachgeprüft. Das Wasser hatte eine spez. Leitfähigkeit von $7 \cdot 10^{-6}$. In der folgenden Tabelle sind die gefundenen Werte eingetragen. Aus theoretischen Gründen wurde versucht, die Ergebnisse durch die Formel: $D_1 = D_0\,(1 - \gamma c)$ [1]) darzustellen. In der dritten Kolonne ist der aus der entsprechenden Messung berechnete Wert von γ, in der vierten sein mittlerer Fehler notiert. Der Fehler ist, wie das in der Natur

Salz	$1000\,c$	D_1	γ	$\pm$	Mittelwert von γ
KCl . . .	1,30	80,22	5,9	1,5	6.9 ± 1.0
	1,00	80,25	7,4	1,9	
	0,75	80,36	8,1	2,4	
	0,65	80,53	5,9	2,9	
	0,50	80,60	6,1	3,6	
	0,32	80,58	10,9	6,7	
$NaCl$ . . .	1,22	80,11	7,5	1,8	$7,1 \pm 1,2$
	1,00	80,36	6,1	2,2	
	0,75	80,33	8,5	2,8	
	0,50	80,68	4,2	4,8	
$LiCl$ . . .	1,32	80,05	7,5	1,9	$7,4 \pm 1,4$
	0,99	80,17	8,4	2,5	
	0,66	80,59	4,8	3,7	
$BaCl_2$ . .	0,75	79,80	17,4	3,5	$16,5 \pm 2,8$
	0,50	80,25	15,1	5,4	
	0,25	80,59	13,1	9,7	
$MgSO_4$ . .	0,75	79,73	18,4	3,3	$17,3 \pm 2,7$
	0,50	80,23	15,3	5,1	
	0,25	80,57	13,9	9,1	
$CuSO_4$ . .	0,75	79,76	18,0	3,5	$19,0 \pm 2,3$
	0,64	79,82	20,5	4,2	
	0,50	80,13	17,9	5,3	
	0,32	80,28	22,0	9,0	
	0,25	80,46	19,4	10,5	
$La(NO_3)_3$	0,50	79,92	23,0	4,3	$24,2 \pm 3,4$
	0,33	80,17	25,2	6,3	
	0,17	80,42	32,0	13,0	
$LaCl_3$ . .	0,50	79,81	24,8	4,2	$26,5 \pm 3,3$
	0,33	80,04	30,6	6,6	
	0,17	80,47	28,5	11,6	

der Methode liegt, ungefähr umgekehrt proportional der Konzentration. Bei der Mittelbildung wurde den einzelnen Messungen ihren Fehlern entsprechende Gewichte zugeordnet. Da es sich durchwegs um eine kleine Anzahl verschiedener Konzentrationen handelt, wurde der Fehler des Mittels mit der Formel $\frac{m}{\sqrt{G}}$ berechnet, wo m der Fehler der Gewichtseinheit,

1) c = Konzentration in Mol/Liter (nicht Äquivalenten pro Liter!).

G die Summe der Gewichte sind. Die Diskussion der Resultate folgt im nächsten Abschnitte nach der Besprechung der Theorie.

II. Theoretische Deutung der experimentellen Resultate.

4. Um zu berechnen, wie der Feldverlauf eines homogenen äußeren Feldes durch die Anwesenheit der Ionen gestört wird, ist es nötig, zuerst zu untersuchen, welchen Einfluß die Ionenfelder auf die DK des sie umgebenden Mediums haben. In einem Abstande r vom Ion wird von ihm eine radial gerichtete Feldstärke $\mathfrak{E}$ und eine ihr parallele dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ herrschen. Nach Definition ist allgemein die DK $\varepsilon = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}}$. Da es sich um starke Felder handelt, wird ε von $\mathfrak{E}$ abhängig sein. Legen wir nun ein im Verhältnis zu $\mathfrak{E}$ kleines äußeres Feld $d\mathfrak{E}$ an, so wird dem ein Zuwachs von $\mathfrak{D}$ um $d\mathfrak{D}$ entsprechen, der auch radial gerichtet ist, und den wir aus obiger Gleichung berechnen können: $d\mathfrak{D} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathfrak{E}}\mathfrak{E} + \varepsilon\right) d\mathfrak{E}$. Die für dies äußere Feld maßgebende DK ist:

$$D_1 = \left(\frac{d\mathfrak{D}}{d\mathfrak{E}}\right)_r = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathfrak{E}}\mathfrak{E} + \varepsilon. \qquad (1)$$

Der Index r soll andeuten, daß das Feld in radialer Richtung genommen wird. Denken wir uns das äußere Feld senkrecht zur radialen, in tangentialer Richtung angelegt, so ändert sich der absolute Betrag von $\mathfrak{E}$ nicht (in erster Näherung) und es wird: $d\mathfrak{D} = \varepsilon d\mathfrak{E}$, da ja ε nur vom absoluten Betrage von $\mathfrak{E}$ abhängt. Die DK in dieser Richtung, sie sei durch den Index ϑ gekennzeichnet, wird:

$$D_\vartheta = \left(\frac{d\mathfrak{D}}{d\mathfrak{E}}\right)_\vartheta = \varepsilon. \qquad (1')$$

Unsere Flüssigkeit verhält sich um das Ion herum wie ein Kristall mit verschiedener DK in verschiedenen Richtungen. Wie diese Werte in der Rechnung bestimmt werden, soll später besprochen werden.

5. Bevor wir die Störung des äußeren homogenen Feldes berechnen, wollen wir kurz wiederholen, wie wir in dem einfachen Fall einer ungeladenen Kugel vorgehen. Wir denken uns also eine Kugel vom Radius a und der DK D_1 in einem Medium von der DK D_0. Wir denken uns weiter ein homogenes Feld von der Feldstärke X_0 angelegt und fragen, wie sein Potential φ durch die Anwesenheit der Kugel geändert wird. Wir betrachten das Potential im Innern und im Äußern der Kugel gesondert und bezeichnen es mit φ_i bzw. φ_a. Die Feldstärken und dielektrischen Verschiebungen gehen aus den Gleichungen hervor:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_i &= -\operatorname{grad}\varphi_i & \mathfrak{E}_a &= -\operatorname{grad}\varphi_a, \\ \mathfrak{D}_i &= D_1\mathfrak{E}_i & \mathfrak{D}_a &= D_0\mathfrak{E}_a. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Die Bedingung $\operatorname{div}\mathfrak{D}_i = 0$ liefert uns eine Differentialgleichung zur Bestimmung von φ_i:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta}\right) = 0. \qquad (3)$$

ϑ ist darin der Winkel, den die Verbindungsgerade des betrachteten Punktes mit dem Mittelpunkte der Kugel mit der Richtung des ungestörten Feldes bildet. Eine analoge Gleichung gilt für φ_a. Der Ansatz $\varphi = \psi \cdot \cos\vartheta$, in dem ψ nur eine Funktion von r ist, genügt der Gleichung, wenn:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right) - 2\psi = 0. \qquad (3')$$

Zwei linear unabhängige partikuläre Lösungen dieser Gleichung sind r und $\frac{1}{r^2}$. Beachten wir noch, daß das Feld für unendlich großes r in das homogene äußere übergehen muß, und daß das Feld im Mittelpunkte der Kugel regulär ist, so lautet das vollständige Integral der Gleichung (2):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_a &= -X r\cos\vartheta + \frac{\mu}{r^2}\cos\vartheta, \\ \varphi_i &= -X_1 r\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

X_1 und μ bestimmen sich aus den Grenzbedingungen an der Kugeloberfläche. Diese Gleichungen (4) besagen, daß das Feld im Innern der Kugel homogen und dem äußern gleichgerichtet ist, seine Stärke beträgt X_1. Das Feld im Äußeren der Kugel ist eine Überlagerung des homogenen Feldes X durch ein Feld, herrührend von einem elektrischen Momente von der Größe μ, das sich im Mittelpunkte der Kugel dem homogenen Felde entgegengesetzt gerichtet befindet. Die Kugel kann also in ihrer Wirkung nach außen durch ein solches Moment ersetzt werden.

6. Im Falle einer geladenen Kugel gehen wir analog vor. Die Kugel sei im Koordinatenmittelpunkte, ihr Radius sei a, ihre DK D_1. Die Richtung des äußeren homogenen Feldes bezeichnen wir mit x-Richtung. Wieder betrachten wir das Potential im Innern φ_i gesondert von dem im Äußern φ_a. Dann sind die Feldstärken:

$$\mathfrak{E}_i = -\operatorname{grad}\varphi_i \qquad \mathfrak{E}_a = -\operatorname{grad}\varphi_a. \qquad (2')$$

Bei der Berechnung der dielektrischen Verschiebung müssen wir aber beachten, daß die

DK außerhalb der Kugel nicht wie im vorhergehenden Falle konstant, sondern von der Richtung und vom Abstande von der Kugel abhängig ist. Wir müssen daher die Komponenten in radialer und tangentialer Richtung gesondert berechnen. Wir kennzeichnen sie durch die Indizes r und ϑ. (Die tangentiale Richtung ist hier so verstanden: In der Ebene Radius—x-Richtung senkrecht zum Radius. Die Komponente senkrecht zu dieser Ebene ist ja wegen der Rotationssymmetrie = 0.) Es werden nun:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}_\vartheta^a &= D_\vartheta \mathfrak{E}_\vartheta = -D_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_a}{\partial \vartheta}, \\ \mathfrak{D}_r^a &= D_r \mathfrak{E}_r = -D_r \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \quad (2')$$

Div $\mathfrak{D} = 0$, in Polarkoordinaten angeschrieben, gibt uns die Differentialgleichung zur Bestimmung der Potentiale. Sie ist für φ_i mit Gleichung (3) identisch und lautet für φ_a:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\right) + \frac{D_\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial \varphi_a}{\partial \vartheta}\right) = 0. \quad (5)$$

Wieder können wir diese partielle in eine totale Differentialgleichung überführen durch den Ansatz: $\varphi(r\vartheta) = \psi(r)\cos\vartheta$. Für ψ gilt dann:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 D_r \frac{d\psi}{dr}\right) - 2 D_\vartheta \psi = 0. \quad (6)$$

Für sehr großes r, wenn der Einfluß der Ladung verschwindend klein wird, geht diese Gleichung in (3′) über. Wir können daher zwei linear unabhängige partikuläre Integrale von (6) so wählen, daß sie in der Grenze für $r = \infty$ in die beiden von (3′), nämlich r und $\frac{1}{r^2}$ übergehen. Wir nennen sie $f(r)$ bzw. $g(r)$. Dann ist:

$$\psi = -X f(r) + \mu g(r). \quad (7')$$

X ist wieder das ungestörte äußere Feld. Um ψ als Überlagerung des ungestörten Feldes durch ein Zusatzfeld darzustellen, können wir ψ auch in der Form schreiben:

$$\psi = -Xr + \mu R(r). \quad (7)$$

R wird für großes r asymptotisch $\frac{1}{r^2}$, und die Wirkung der Kugel in großer Entfernung ist dieselbe wie die eines elektrischen Momentes von der Größe μ im Kugelmittelpunkte. Das Potential stellt sich nun dar:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i &= -X_1 r\cos\vartheta, \\ \varphi_a &= -Xr\cos\vartheta + \mu R(r)\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Grenzbedingungen an der Kugeloberfläche geben die Werte von X_1 und μ. Sie verlangen, daß die Normalkomponenten der dielektrischen Verschiebung und die Tangentialkomponenten der Feldstärke die Grenzfläche stetig durchsetzen müssen, d. h.:

$$-D_r^a\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\right)_{r=a} = -D_1\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\right)_{r=a};$$

$$-\frac{1}{a}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial \vartheta}\right)_{r=a} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta}\right)_{r=a}.$$

Einsetzen der Werte von φ_i und φ_a, sowie einige kleine Umrechnungen führen auf die Form:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{D_r^a - D_1}{D_r^a\left(\frac{dR}{dr}\right)_a - D_1\frac{R_a}{a}} X, \\ x_1 &= \frac{\left(\left(\frac{dR}{dr}\right)_a - \frac{R_a}{a}\right) D_r^a}{D_r^a\left(\frac{dR}{dr}\right)_a - D_1\frac{R_a}{a}} X. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Dabei soll der Index a darauf hinweisen, daß die betreffende Größe für $r = a$ zu nehmen ist.

7. Um nun die DK einer Lösung von n solchen geladenen Kugeln pro cm³ in einem Medium von der DK D_0 zu bestimmen, berechnen wir die Polarisation $\mathfrak{P}$, d. h. das elektrische Moment pro cm³. Es ist bekanntlich:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P} = D\mathfrak{E} \quad (10)$$

und daraus:

$$D = \frac{\mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}}{\mathfrak{E}}. \quad (10')$$

Wir berechnen vorerst das Moment, das eine zur geladenen Kugel konzentrische vom Radius ϱ beiträgt. ϱ sei so groß, daß außerhalb keine Wirkung der Ladung mehr vorhanden ist, daß dort also gilt:

$$D_r = D_\vartheta = D_0; \quad R = \frac{1}{r^2}. \quad (11)$$

Infolge der Rotationssymmetrie wird nur ein Moment in der x-Richtung resultieren. Die Polarisation in dieser Richtung sei $\mathfrak{P}_x$. Das Moment $\mathfrak{M}$ der Kugel vom Radius ϱ ist $\int_\varrho \mathfrak{P}_x dS$, wenn dS ein Volumenelement bezeichnet. Im Innern der geladenen Kugel herrscht ein homogenes Feld, folglich ist nach (10):

$$4\pi\mathfrak{P}_x^i = (D_1 - 1)X_1$$

und das Moment dieser Kugel:

$$4\pi\mathfrak{M}_i = 4\pi\int_{(a)}\mathfrak{P}_x^i dS = \frac{4\pi}{3}a^3(D_1 - 1)X_1.$$

In der übrig bleibenden Kugelschale ist die Polarisation in radialer und tangentialer Richtung verschieden. Es folgt aus (10), (2') und (8):

$$4\pi \mathfrak{P}_r^a = (D_r - 1)\left(X - \mu \frac{dR}{dr}\right)\cos\vartheta;$$

$$4\pi \mathfrak{P}_\vartheta^a = (D_\vartheta - 1)\left(-X + \mu \frac{R}{r}\right)\sin\vartheta.$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{P}_x^a = \mathfrak{P}_r^a \cos\vartheta - \mathfrak{P}_\vartheta^a \sin\vartheta.$$

Als Volumenelement setzen wir:

$$dS = 2\pi r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta.$$

Dann wird das zur Kugelschale gehörige Moment, wenn wir die Integration über ϑ ausführen:

$$4\pi \mathfrak{M}_a = \frac{4\pi}{3}\int_a^\varrho r^2 \left| (D_r - 1)\left(X - \mu\frac{dR}{dr}\right) + 2(D_\vartheta - 1)\left(X - \mu\frac{R}{r}\right)\right| dr.$$

Addieren und subtrahieren wir zu diesem Integral:

$$3\cdot\frac{4\pi}{3}\int_a^\varrho (D_0 - 1) X r^2 dr = \frac{4\pi}{3}(D_0 - 1) X(\varrho^3 - a^3),$$

so wird:

$$4\pi \mathfrak{M}_a = \left[\frac{4\pi}{3}(D_0 - 1)(\varrho^3 - a^3) + \frac{4\pi}{3}\int_a^\varrho \left| (D_1 - D_0) + 2(D_\vartheta - D_0) - \frac{\mu}{X}(D_1 - 1)\frac{dR}{dr}\right| - 2\frac{\mu}{X}(D_\vartheta - 1)\frac{R}{r}\right| r^2 dr\Bigg] X. \quad (12)$$

Wir dürfen für die obere Integrationsgrenze ∞ statt ϱ setzen, da zufolge (11) für $r > \varrho$ der Integrand verschwindet. Diese Form bietet gegenüber der ersten bei der weiteren Umformung gewisse Vorteile. Auch erkennt man so, daß das Integral den Zusatz zur Polarisation durch die Wirkung der Ladung bedeutet, denn der erste Ausdruck stellt ja die Polarisation der Kugelschale durch das reine Medium dar. Das Moment der ganzen Kugel wird:

$$4\pi \mathfrak{M} = 4\pi \mathfrak{M}_i + 4\pi \mathfrak{M}_a.$$

Das Moment eines cm³ der Lösung berechnet sich nun so: Das 4πfache des Momentes des Lösungsmittels wäre $(D_0 - 1)X$. Davon müssen wir den Teil von n Kugeln vom Radius ϱ subtrahieren und durch n mal das eben berechnete Moment einer Kugel ersetzen. Das ergibt:

$$4\pi \mathfrak{M}_{res} = \mathfrak{P}_{res} = (D_0 - 1)X - n\frac{4\pi}{3}a^3(D_0 - 1)X + n\frac{4\pi}{3}a^3(D_1 - 1)X + X\cdot n\frac{4\pi}{3}\int_a^\infty (\ldots) r^2 dr.$$

Daraus folgt die DK nach (10) zu:

$$D_{res} = D_0 + \frac{4\pi}{3} n a^3 \left[(D_1 - 1)\frac{X_1}{X} - (D_0 - 1)\right] + n\frac{4\pi}{3}\int_a^\infty (\ldots) r^2 dr.$$

Da $\frac{X_1}{X}$ und $\frac{\mu}{X}$ nach (9) Konstanten sind, ist die resultierende DK vom Felde unabhängig. Das Integral kann noch weitgehend umgeformt werden. Durch partielle Integrationen, unter Berücksichtigung der Differentialgleichung (6) und der Normierungen (11) erhält der Ausdruck für die DK der Lösung seine endgültige Form:

$$D = D_0 - n\frac{4\pi}{3}a^3 \left| 2D_0 - D_r^a - 1 - (D_1 - 1)\frac{X_1}{X} - (2D_0 + 1)\frac{\mu}{X}\frac{1}{a^3} - \frac{\mu}{X}\left[D_r^a\left(\frac{dR}{dr}\right)_a - \frac{R_a}{a}\right]\right|. \quad (13)$$

8. Um diese Formel (13) auszuwerten, müssen die Funktion R und ihre Ableitung nach r für $r = a$ bekannt sein. Diese Werte können durch Integration der Gleichung (6) gefunden werden, wozu D_r und D_ϑ als Funktionen von r gegeben sein müssen. Wir wollen hier die Rechnung für den Fall einer wässerigen Lösung eines ein-einwertigen Salzes angeben. Das dielektrische Verhalten des Wassers ist noch nicht sicher bekannt. Die verschiedenen Methoden zur Bestimmung des Dipolmomentes liefern sich widersprechende Resultate (vgl. die Zusammenstellung bei Blüh) (2). Die Assoziationsfrage ist schon Anlaß verschiedener eingehender Untersuchungen geworden, ohne bis heute befriedigend gelöst worden zu sein. Wir wollen später auf diese Frage zurückkommen und einstweilen die Assoziation vernachlässigen. Ebenso vernachlässigen wir die Volumenkontraktion, die auf der Kraftwirkung der inhomogenen ionalen Felder auf die Dipole beruht. Wir wollen uns die Wassermoleküle überall gleich dicht verteilt denken. Jedes trage ein gleiches elektrisches Moment. Des weiteren soll für die Polarisation des Wassers die bekannte Debyesche Formel gelten (4):

$$\mathfrak{P} = \alpha \cdot K + n_0 m\left[\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right] \qquad x = \frac{mK}{kT}. \quad (14)$$

worin α die optische Polarisierbarkeit, n_0 die Zahl der Dipole pro cm³, m das elektrische Moment, K die sog. innere Feldstärke bedeuten. Gegen die Verwendung dieser Formel können berechtigte Einsprüche erhoben werden, aber in Ermanglung einer besseren soll die Rechnung mit dieser durchgeführt werden. Das Moment m soll so groß gewählt werden, wie es unter den gemachten Annahmen einer statischen DK 80 und einer optischen DK 3 entspricht. Es wird dann $m = 7{,}12 \cdot 10^{-19}$ abs. elektrostatische Einheiten. Die innere Feldstärke K hängt mit $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ zusammen durch die Beziehungen:

$$\mathfrak{E} = K - \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}; \quad \mathfrak{D} = K + 2\,\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}. \qquad (15)$$

Da schließlich:

$$\mathfrak{D} = \frac{e}{r^2}, \qquad (16)$$

wenn e die Ladung des Ions ist, so sind durch diese Gleichungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, und damit D_r und D_ϑ in ihrer Abhängigkeit von r bestimmt. Für die DK des Ions wurde die DK 1 gewählt, wie wir sehen werden, spielt diese Zahl gar keine Rolle.

9. Es ist nicht möglich, bei diesen komplizierten Zusammenhängen die Gleichung direkt zu integrieren. Es muß ein graphisches oder analytisches Näherungsverfahren angewandt werden. Zuerst bestimmt man die Werte von D_r und D_ϑ. Das geschieht am einfachsten so, daß man K beliebig wählt, dann nach (14) $\mathfrak{P}$, nach (15) $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, nach (16) den dazu gehörigen Radius und schließlich nach (1) die Werte der DK berechnet. Die so gefundenen Werte sind in der Fig. 4 eingetragen.

Man sieht, daß vollkommene Sättigung nur in allernächster Nähe vom Ion eintritt. Da im Integral in (12) die Differenz der DK D_0 und D_r bzw. D_ϑ über das Volumen summiert wird, vermuten wir schon, daß auch die nicht vollkommen gesättigten Gebiete viel zur Erniedrigung der DK beitragen werden[1]).

Für die Integration der Differentialgleichung (6) wurde die Methode von Runge-Kutta (8) gewählt, und zwar bestimmen wir zuerst die partikulären Integrale f und g, um dann daraus unter Heranziehen der Gleichungen (5'), (7) und (9) R_a und $\left(\frac{dR}{dr}\right)_a$ zu berechnen. Um diese Methode anwenden zu können, müssen wir von f und g für einen endlichen Wert von r die Größe kennen, ebenso von ihren Ableitungen nach r. Wir verschaffen sie uns, indem wir D_r und D_ϑ für große r in eine Reihe entwickeln und dann (6) durch Reihenansatz integrieren. Man findet:

$$D_r = D_0\left(1 - \frac{3b}{r^4}\right); \quad D_\vartheta = D_0\left(1 - \frac{b}{r^4}\right).$$

Und:

$$f = -r\left(1 - \frac{2b}{r^4}\right); \quad g = \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{b}{r^4}\right)$$

$$(b = 8{,}362 \cdot 10^{-30}).$$

Bei einer Genauigkeit von 0,1 Proz. darf diese Entwicklung bis zu 15 Å benutzt werden. Das Fehlen der niederen Potenzen von $\frac{1}{r}$ verbürgt die Konvergenz des Integrals in (12). Von diesem Werte ausgehend wird durch gewisse

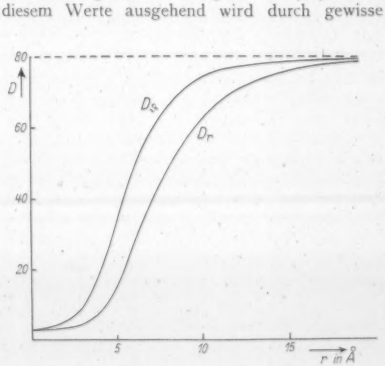


Fig. 4.

Mittelbildung über ein kleines Intervall extrapoliert und so sukzessive der Wert der Funktionen an irgendeiner Stelle gefunden. Der Form der Funktion entsprechend wurden die Intervalle nicht, wie es einer rascheren Rechnung angemessen wäre, gleich lang, sondern ungefähr proportional dem Quadrate des Abstandes r gewählt. Die Rechnung wurde dreimal durchgeführt: Zweimal ausgehend von 16 Å mit verschiedenen Intervallgrößen und einmal ausgehend von 30 Å. Die Endresultate stimmten innerhalb 5 Proz. überein, eine Genauigkeit, die für unsere Zwecke genügt. Das Ergebnis ist für 3 Ionenradien in der folgenden Tabelle eingetragen:

1) Die Tatsache, daß sich die Wirkung des Ions so weit erstreckt, gibt der Rechnung eine sinnvolle Bedeutung. Nur wenn es sich um so große Abmessungen handelt, darf das Wasser als Kontinuum behandelt werden, wie dies hier getan worden ist. Vgl. auch Schmick (10).

a in Å	I	II	III	IV
1,2	270	2	−46700	400
2,0	1250	11	−46700	650
2,8	3410	29	−47000	850

$$\mathrm{I} = 10^{24}\,(2D_0 - D_r^a - 1)\,a^3,$$

$$\mathrm{II} = 10^{24}\,\frac{X_1}{X}\,a^3,$$

$$\mathrm{III} = 10^{24}\,(2D_0 + 1)\,\frac{\mu}{X},$$

$$\mathrm{IV} = 10^{24}\,\frac{\mu}{X}\left[D_r^a\left(\frac{dR}{dr}\right)_a - \frac{R_a}{a}\right]a^3.$$

Daraus folgt die DK der Lösung für alle 3 Radien gleich zu (die Konzentration c ist in Molen pro Liter Lösung angegeben)

$$\underline{D = D_0\,(1 - 3{,}0\,c)}$$

für ein ein-einwertiges Salz, d. h. ein Mol einwertiger Ionen gibt eine relative Erniedrigung der DK um 1,5. Aus der Tabelle ersehen wir, daß den größten Anteil an der Erniedrigung das Glied in der dritten Kolonne beiträgt. Es ist für die betrachteten Radien ungefähr konstant, daher ist auch die Erniedrigung für alle diese Ionen dieselbe. (Der oben angegebene Wert 3,0 ist der Mittelwert aus den 3 Zahlen, die Abweichungen sind dann kleiner als 5 Proz. Alle unsere Angaben bezwecken keine größere Genauigkeit.) Es ist interessant, den Wert von $\frac{\mu}{X}$ mit dem im Falle einer ungeladenen Kugel zu vergleichen. Dort findet man:

$$\frac{\mu}{X} = \frac{D_0 - D_1}{2\,D_0 + D_1}\,a^3,$$

das macht (für einen Radius von 2 Å und $D_0 = 80$, $D_1 = 1$) $3{,}9 \cdot 10^{-21}$, d. h. ein 74 mal kleinerer Wert. Wir können das auch so ausdrücken: Um den gleichen Effekt wie von einer geladenen Kugel vom Radius 2 Å zu erhalten, müßte eine ungeladene einen Radius von 8,4 Å haben. Man erkennt aus der Tabelle auch, daß $\frac{X_1}{X}$ ungefähr denselben Wert hat wie für eine ungeladene Kugel. Er ist nicht genau zu bestimmen, da er aus der Differenz zweier großer, fast gleicher Zahlen hervorgeht. Immerhin sieht man, daß dieses Glied (II), auch bei Verschiedenheit von D_1 von 1, keinen wesentlichen Anteil an der Abnahme der DK haben kann. Auch auf die Bestimmung von $\frac{\mu}{X}$ ist D_1 von kleinem Einfluß.

10. Wir wollen noch kurz auf einige der gemachten Annahmen zurückkommen. Die Vernachlässigung der Volumenkontraktion ist zulässig, da sie nach Webb (13) bei 3,3 Å erst 3 Proz. ausmacht und die dem Ion näheren Gebiete, wie wir gesehen haben, auf die DK-Abnahme keinen so großen Einfluß haben. Der optische Wert der DK ist sehr ungenau bekannt, da seine Extrapolation sehr unsicher ist. Um den Einfluß in unserer Rechnung zu erkennen, haben wir sie für den Wert 2 wiederholt. Der Einfluß wird am größten in der Nähe des Ions sein, wo D_r und D_ϑ vom optischen Werte wenig verschieden sind. Er verschwindet für größere Entfernungen, da dort die beiden DK von der optischen DK wenig abhängen. Wir werden daher erwarten, daß die neue Rechnung nicht ein wesentlich verschiedenes Resultat liefern wird. Es zeigt sich, daß die relative Abnahme pro Mol einwertiger Ionen jetzt 1,7 statt 1,5 wird. Von größerem Einfluß ist die Assoziation. Nehmen wir nämlich an, nur jedes zehnte Molekül trage einen Dipol, der, um die statische DK 80 zu ergeben, $\sqrt{10}$ mal größer sein muß, so wird die relative Abnahme ca. 10. Leider ist uns die Assoziation schon im gewöhnlichen Zustande nicht sicher bekannt, in den starken ionalen Feldern wird sie sicher noch komplizierter werden. Wir können daher nicht erwarten, daß die experimentellen Resultate mit den theoretischen genau übereinstimmen werden. Es war uns nur daran gelegen, die Größenordnung richtig wiederzugeben. Im ersten Teil dieser Arbeit wurde für die Abnahme bei einem ein-einwertigen Salze die Zahl 7, für ein einzelnes Ion also 3,5 gefunden. Das stimmt der Größenordnung nach mit der Theorie überein. Walden (12) fand für das Ion 10. Nach Untersuchungen von Hellmann und Zahn (5) scheinen jedoch die von Walden gefundenen Werte nicht zuverlässig zu sein. Der Vergleich mit den von Hellmann und Zahn (6) selber vorgenommenen Messungen ist schwer, da sich die Konzentrationsgebiete ihrer und meiner Messungen nicht decken (wenigstens bei den genauen Resultaten mit der Dekrementsmethode). Unsere Rechnung bezieht sich nur auf ganz geringe Konzentrationen. Nur dort ist ein der Konzentration proportionaler Abfall der DK zu erwarten. Bei größeren Konzentrationen kommen sich die Ionen schon so nahe, daß sich die Felder gegenseitig stören. Die Abnahme der DK wird dann geringer. Es ist daher nicht gestattet, wie dies Hellmann und Zahn tun, aus einem Gebiet höherer Konzentration zu extrapolieren. Auch sind die Absolutwerte, wie die Autoren selber bemerken, noch sehr ungenau. Nur die Relativwerte zu *HCl* sind exakter. Um

den Anschluß an die Hückelsche Theorie der konzentrierten Elektrolytlösungen zu finden, setzen sie den Wert für die absolute Abnahme der $DK = 10$ (für HCl), und geben die anderen Salze relativ zu diesem Werte. Aber die Beziehung zwischen der DK, wie sie Hückel in seiner Arbeit verwendet, und der in der Messung bestimmten ist nicht so eindeutig, daß eine direkte Gleichsetzung erlaubt ist. Eine genaue Diskussion ist auch dadurch erschwert, daß bei den Kurven (l. c., S. 749 u. 751) nicht angegeben ist, ob es sich hier um relative oder absolute Messungen handelt. Die Kurve für $CuSO_4$ würde, absolut genommen, einen extrapolierten Wert von ca. 16 geben gegenüber unserem eigenen Wert von 19. Es bliebe noch die Diskussion der Messungen bei geringen Konzentrationen, die Hellmann und Zahn mit verschiedenen Methoden durchgeführt haben, und die zu einem Resultat 0 bis 3 gegenüber 7 bei uns führten (5). Doch scheinen mir die Messungen nur orientierender Natur zu sein. In unserem Institut sollen in der nächsten Zeit ebenfalls Messungen mit der zweiten Drudeschen Methode durchgeführt werden, die dann einen besseren Vergleich erlauben werden.

11. Die Rechnung läßt sich sehr leicht auf mehrwertige Salze übertragen. Ist z die Wertigkeit des Ions, d_1 die eben berechnete Abnahme pro Mol einwertiger Ionen, so wird nun die Abnahme sein $d_z = d_1 \sqrt{z^3}$. Besteht ein Salz aus verschiedenwertigen Ionen, so addiert man die betreffenden d. Der Beweis ist der: Durch Ändern von z wird in unserer Rechnung nur das zu einem bestimmten Werte von K gehörige r geändert, und zwar wird nun an Stelle von r $r\sqrt{z}$ auftreten. Wir haben uns also in Fig. 4 nur die r-Achse um $\sqrt{z}$ zu dilatieren, um die Figur für den neuen Fall zu erhalten. Wir finden so D'_r und D'_∞. Führen wir die Transformation durch $r_1 = \frac{r}{\sqrt{z}}$, so gehen die D' als Funktionen von r über in die D als Funktionen von r_1. Transformieren wir ebenso die Differentialgleichung zur Bestimmung von R' (das $'$ bezeichne die Funktion für das z-wertige Ion), so geht sie in die von $R(r_1)$ über, ebenso die Grenzbedingungen, wenn wir statt a jetzt $a_1 = \frac{a}{\sqrt{z}}$ setzen. Infolgedessen geht $R'(r)$ selber über in $R(r_1)$. Die Klammer in dem Integral Formel (12) geht dann auch in den Ausdruck für das einwertige Ion über. Ersetzen wir schließlich noch $r^2 dr$ durch $\sqrt{z^3} r_1^2 dr_1$, so wird:

$$\int_a^\infty (\ldots)' r^2 dr = \sqrt{z^3} \int_{a_1}^\infty (\ldots) r_1^2 dr_1,$$

d. h. das Integral des z-wertigen Ions hat den $\sqrt{z^3}$ mal größeren Wert als das des einwertigen, genommen für den Ionenradius a_1. Genau so verhalten sich der erste Term in (12) und das Moment $\mathfrak{M}_i$. Daraus folgt (unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der Wert für das einwertige Ion nicht vom Ionenradius abhängt), daß auch die Abnahme der DK einfach den $\sqrt{z^3}$ fachen Wert erhält, was wir behauptet haben. Daß es so sein muß, ist einleuchtend, denn wenn sich die Wirkung der Ladung weiter erstreckt und sie über den Raum integriert wird, so muß der Effekt ungefähr mit der dritten Potenz der Radiusdilatation wachsen. Es ist interessant, daß, obwohl die absoluten Werte in Experiment und Theorie nicht übereinstimmen, doch das Verhältnis zwischen den einzelnen Salzen die richtigen Werte ergeben. Ein Salz, das aus zwei Ionen der Wertigkeiten z_1 und z_2 besteht, erhält nach der Theorie den Wert $(\sqrt{z_1^3} + \sqrt{z_2^3}) d_1$. Schreiben wir alle unsere experimentellen Resultate in dieser Form, so läßt sich aus ihnen für d_1 der Mittelwert 3,3 ableiten. Mit ihm kann man rückwärts nun wieder den Wert für das Salz berechnen. In der folgenden Tabelle sind diese Werte unter $\gamma_{\text{theoret.}}$ aufgezeichnet und unter die experimentell gefundenen Zahlen geschrieben:

Salz	KCl	$NaCl$	$LiCl$	$BaCl_2$	$MgSO_4$	$CuSO_4$	$La(NO_3)_3$	$LaCl_3$
$\gamma_{\text{exp.}}$	6,9	7,1	7,4	16,5	17,3	19,0	24,2	26,5
$\pm$	1,0	1,2	1,4	2,8	2,7	2,3	3,4	3,5
$\gamma_{\text{theoret.}}$	6,6	6,6	6,6	15,8	18,5	18,5	27,1	27,1

Man erkennt, für gleichwertige Salze ist die Abnahme der DK dieselbe, für mehrwertige folgt sie innerhalb der großen expetimentellen Fehler der aufgestellten Formel. Ob die Abweichungen systematischer Natur sind, d. h. durch die Natur der Ionen bedingt sind, ist nicht zu entscheiden. Interessanterweise ist auch bei den Messungen von Walden (12) das Verhältnis zwischen KCl und $BaCl_2$ das geforderte, er findet nämlich für das Verhältnis 2,35 (theoretisch 2,4). Auch scheint sein anderes einwertiges Salz: $N(CH_3)_4J$, für kleine Konzentrationen denselben Wert zu geben wie KCl.

12. Wir haben bisher nur wässerige Lösungen

betrachtet, wir wollen nun noch einige Angaben über nichtwässerige Lösungen machen. Walden findet, daß die relative Abnahme mit $\frac{1}{\sqrt{D_0^3}}$ wachse. Er erklärt es, indem er den Radius der Sättigungssphäre umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Feldstärke an einem Punkte setzt. Ändert sich die DK, so ändert sich die Feldstärke ihr umgekehrt proportional, der Radius also proportional der Wurzel, die Kugel proportional der dritten Potenz davon. Nach unserem Bilde müssen wir diese Überlegungen etwas modifizieren. Der Grad der Sättigung ist nicht durch die Feldstärke, sondern durch die innere Feldstärke bestimmt. Diese ändert sich aber nicht umgekehrt proportional zur DK. Was immer konstant ist, ist die dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$. Die innere Feldstärke K hängt mit ihr zusammen durch: $K = \mathfrak{D} - \frac{8\pi}{3}\mathfrak{P}$. Nun ist bekanntlich die Änderung der Polarisation mit der DK eine sehr geringe, es wird sich daher auch der Sättigungsgrad und weiter die Abnahme der DK wenig ändern. Wir haben für Äthylanilin die Rechnung durchgeführt, unter der Annahme einer statischen DK 5,76, einer optischen 2,37. Die Fig. 5 gibt D_r und D_ϑ als Funktionen von r

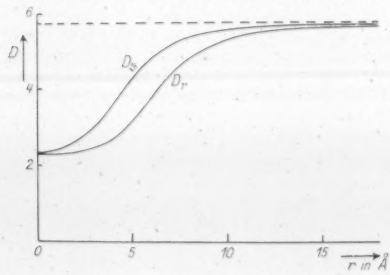


Fig. 5.

und zeigt deutlich, daß die Wirkung der Ladung nicht weiter reicht, als im Falle des Wassers. Die relative Abnahme erwarten wir daher nicht größer, sondern eher etwas geringer, da das Verhältnis der Differenz der optischen von der statischen DK zur optischen DK ein kleineres als bei Wasser ist. Wir fanden eine relative Abnahme pro Mol einwertiger Ionen von 0,9 gegenüber 1,5 bei Wasser. Wir haben selber einige Messungen an Glyzerin ausgeführt. Wir fanden für KCl 3,5 und $NaCl$ 4,1. Diese Werte würden die Ansicht bestätigen, daß die relative Abnahme nicht stark mit der DK des Lösungsmittels variieren kann. Das Glyzerin war jedoch wasserhaltig (1,25 *Bé*), die Resultate müssen folglich nicht eindeutig sein. Auch die wasserfreie Herstellung anderer in Betracht kommender Substanzen war uns nicht möglich, wir mußten daher auf eine weitere Nachprüfung verzichten.

Zum Schlusse sei es mir noch vergönnt, Herrn Prof. Dr. P. Debye für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für das Interesse, das er ihrem Fortgange entgegengebracht hat, herzlichst zu danken.

Literaturverzeichnis.

1) O. Blüh, Zeitschr. f. Phys. **25**, 220, 1924.
2) —, Physik. Zeitschr. **27**, 226, 1926. Siehe dort weitere Literaturangabe.
3) M. Born, Zeitschr. f. Phys. **1**, 221, 1920.
4) P. Debye, Handbuch der Radiologie, Bd. 6.
5) H. Hellmann u. H. Zahn, Physik. Zeitschr. **27**, 636, 1926.
6) — —, Ann. d. Phys. **81**, 711, 1926.
7) J. Herweg, Zeitschr. f. Phys. **3**, 36, 1920.
8) Runge-König, Numerisches Rechnen. Springer 1925.
9) H. Sack, Physik. Zeitschr. **27**, 206, 1926.
10) H. Schmick, Zeitschr. f. Phys. **24**, 56, 1924.
11) P. Walden u. H. Ulich, Zeitschr. f. phys. Chem. **110**, 44, 1924.
12) —, u. O. Werner, Zeitschr. f. phys. Chem. **116**, 261, 1925.
13) T. J. Webb, Journ. Amer. Chem. Soc., Okt. 1926.
14) E. Hückel, Physik. Zeitschr. **26**, 93, 1925.

Zürich, Physikal. Institut der E.T.H., Dezember 1926.

(Eingegangen 25. Januar 1927.)

Anfangspermeabilität und Maximalpermeabilität.

(Bemerkung zu den Mitteilungen von W. Vogel und von O. v. Auwers.)

Von J. Würschmidt.

W. Vogel hat in seinem zusammenfassenden Bericht über die magnetische Anfangspermeabilität[1]) im Anschluß an den experimentellen Befund von Gumlich und Rogowski[2]) die Behauptung aufgestellt: „Kleine Anfangspermeabilität ist stets verbunden mit großer Koerzitivkraft und kleiner Maximalpermeabilität; der umgekehrte Schluß dagegen, mit großer Maximalpermeabilität auf große A.-P. zu schließen, ist nicht zulässig.

O. v. Auwers[3]) weist demgegenüber darauf hin, daß man aus der Gumlich-Rogowskischen

1) W. Vogel, Physik. Zeitschr. **27**, 544—554, 1926.
2) E. Gumlich u. F. Rogowski, Ann. d. Phys. **34**, 253, 1911.
3) O. v. Auwers, Physik. Zeitschr. **27**, 724—725, 1926.

Tabelle nur den Schluß ziehen darf, „daß kleine M.-P. mit kleiner A.-P. verbunden ist", nicht aber daß kleine A.-P. stets kleine M.-P. im Gefolge hat. Demzufolge wäre also kleine A.-P. mit großer M.-P. verbunden sehr wohl möglich (Fig. 1 bei v. Auwers). Nur der Fall: Große A.-P. verbunden mit kleiner M.-P. ist ausgeschlossen.

Es sei mir gestattet auf eine früher von mir veröffentlichte Arbeit[1]) zu verweisen, in der aus den Gumlich-Rogowskischen Messungen folgende Schlüsse gezogen sind:

1. Kleiner M.-P. entspricht auch kleine A.-P.
2. Die A.-P. ist klein bei Material mit großer Koerzitivkraft und kleiner Remanenz.
3. Hoher M.-P. entspricht nicht immer hohe A.-P.
4. Durch Ausglühen wird die A.-P. in den meisten Fällen vergrößert.
5. Siliziumzusatz vergrößert die A. P. beträchtlich (Größenordnung $\mu_0 = 500$ bei 1,45 Proz. Silizium.

Hierzu sei noch folgendes bemerkt:

Im allgemeinen wäre zunächst festzulegen, was die Bezeichnung „klein" oder „groß" bei M.-P. und A.-P. zu bedeuten hat. Die M.-P. schwankt z. B. in der bei Kohlrausch[2]) wiedergegebenen Übersicht zwischen 110 und 14800; die A.P. ist bei den besten permanenten Magnetstahlen zwischen 10 und 30, bei Weicheisen von der Größenordnung 200, bei Siliziumeisen etwa 500, bei Nickelstahlen noch bedeutend größer[3]); ich selbst habe bei 75—80 Proz. Nickel Werte von 2000 nach Glühen bei 800° und langsamem Erkalten gemessen[3]); bei geeigneter Wärmebehandlung stieg die A.-P. bis 4000[4]), während Arnold und Elmen[5]) sogar $\mu_0 = 12000$ bei 78 proz. Nickelstahl gemessen haben. Diesem Stahl entsprach, was gleichfalls bemerkenswert ist, eine M.-P. von 87000.

Es wäre nun nicht richtig, für beide Größen A.-P. und M.-P. festzusetzen: Werte bis etwa 500 betrachten wir als klein, über 500 als groß. Denn in allen Fällen muß die M.-P. größer als die A.-P. sein; wir könnten aber diese Festsetzung wohl für die A.-P. treffen. Aus theoretischen Überlegungen[6]) und der Betrachtung der Magnetiserungskurven folgt, daß die Permeabilität anfangs konstant sein, dann aber wachsen muß, was durch das Umklappen der Elementarkomplexe bedingt ist, endlich nach Erreichen eines Maximums abnehmen und asymptotisch den Wert 1 erreichen muß. Wenn demnach die M.-P. unter allen Umständen größer als die A.-P. sein muß — vgl. den nach v. Auwers ausgeschlossenen Fall — läßt sich doch nichts Bestimmtes darüber aussagen, wie groß bei gegebener A.-P. die M.-P. sein wird. ob die M.-P. etwa ein Doppeltes oder ein Siebenfaches (wie bei dem Arnold-Elmenschen Permalloy) der A.-P. werden kann. In dem in meiner oben genannten Arbeit behandelten theoretischen Fall, der neben dem äußeren Felde nur die in den Elementarkomplexen selbst entstehende zurücktreibende Kraft, nicht aber das „Strukturfeld" berücksichtigt, würde die M.-P. etwa das Doppelte der A.-P. sein müssen:

$$\bar{\mu}_0 = 2{,}96 \cdot$$

$$\bar{\mu}_m = 1 + 4\pi \bar{k}_m = 1 + 4\pi \frac{1719}{2746} \left(\frac{di}{dh}\right)_{max}$$

$$= 1 + 4\pi \frac{1719}{2746} \cdot \frac{0{,}762}{1{,}3} = 5{,}61.$$

In diesem Grenzfall, der einem „absolut" harten Stahl entsprechen würde (Remanenz $0{,}636 \cdot 21600 = 13738$, Koerzitivkraft ~ 2746) wäre die Gumlichsche Regel $\mu_m = \frac{R}{2K}$ nicht erfüllt, da sich hiernach $\mu_m = 2{,}5$ ergäbe.

Es scheint demnach die Annahme berechtigt, daß die M.-P. mindestens etwa doppelt so groß als die A.-P. sein muß; daß das für die einzelnen Stahlsorten verschieden groß anzunehmende „Strukturfeld" die Verkleinerung der Koerzitivkraft, die Vergrößerung der A.-P., die Vergrößerung der M.-P. auf mehr als das Doppelte der A.-P., und die Annäherung an die Gültigkeit der Gumlichschen Regel bewirkt.

Tucumán, Phys. Lab. d. Univ., Januar 1927.

(Eingegangen 12. Februar 1927.)

1) J. Würschmidt, Zeitschr. f. Phys. **12**, 128—164, 1927.

2) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik, 14. Aufl., S. 784, 1923.

3) J. Würschmidt, Kruppsche Monatshefte, September—Dezember 1925.

4) Diese Messungen sind noch nicht veröffentlicht.

5) H. D. Arnold u. G. W. Elmen, Electricinon, S. 672, 22. Juni 1923.

6) Vgl. a. J. Würschmidt, Zeitschr. f. Phys. **37**, 773—802, 1926.

Die Stromrichtung in Blitzen.

Von H. Maurer.

In der Physik. Zeitschrift 1927, S. 66 weist Herr A. Wigand darauf hin, daß die Blitze meist negative Elektrizität von der Wolke zur Erde führen. Das Beobachtungsmaterial, das diesen Schluß stützt, bezieht sich nur auf Blitze über Land. Beobachtungen zur See liegen nur ganz vereinzelt vor, sind aber ziemlich zuverlässig. Wenn nämlich ein Blitz in ein eisernes

Schiff einschlägt, ändert er den Schiffsmagnetismus und die von diesem abhängende Kompaßdeviation. Bei der Wichtigkeit des Kompasses für die Seefahrt werden aber die Deviationsänderungen natürlich festgestellt; und man kann aus ihnen auf die Stromrichtung im Blitz schließen. In den etwa 10 Fällen, die ich darüber in der nautischen Literatur gefunden habe, war nun stets zu schließen, daß an Kompassen vor der vertikalen Blitzbahn an Steuerbord ein magnetischer Nordpol, an Kompassen hinter der Blitzbahn an Steuerbord ein Südpol wirksam geworden war, was also positiven Strom von der Wolke zur Erde bedeutet. (Näheres über diese Erfahrungen habe ich in den Annalen der Hydrographie mitgeteilt 1925, S. 76 u. 236, 1926, S. 131 u. 244). Wenn auch künftige Fälle mit dieser Erfahrung in Einklang bleiben, so würde daraus ein Unterschied im Verhalten der Blitze über Land und über See folgen in der Art, daß in den Blitzen über Land häufiger negative Elektrizität von der Wolke zur Erde, in Blitzen über See umgekehrt strömt. Ein solches Ergebnis würde bei der großen Ausdehnung der Meere mit dem Wigandschen Gedanken, daß die negative Ladung der Erde durch die Blitze erhalten bleiben könne, nicht im Einklang sein.

Es wäre sehr erwünscht, die Frage durch weitere Beobachtungen zur See zu erklären, wobei man sich nicht auf die wenigen Fälle beschränken sollte, wo der Blitz in Schiffe einschlägt. Man müßte vielmehr auch an Bord Beobachtungen über Feldänderungen bei Blitzen in Schiffsnähe zu machen suchen. Auch auf dem Lande sollte man, insbesondere auch in den Tropen, weitere Beobachtungen sammeln. Denn wenn nach den europäischen Landbeobachtungen die Häufigkeiten der 2 Blitzstromrichtungen 63 Proz. und 37 Proz. sind, was wohl mit den verschiedenen Gewitterarten zusammenhängen dürfte, so könnte diese Verteilung in den Tropen doch vielleicht wesentlich anders sein.

Berlin, 10. Februar 1927.

(Eingegangen 14. Februar 1927.)

BESPRECHUNGEN.

H. Ambronn u. A. Frey, Das Polarisationsmikroskop, seine Anwendung in der Kolloidforschung und in der Färberei. Bd. 5 der Sammlung Kolloidforschung in Einzeldarstellungen, herausgeg. von R. Zsigmondy. 8°. X u. 194 S. mit 48 Abb. im Text und einer Farbentafel. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft. 1926. Preis geh. M. 12.—; geb. M. 13.50.

Die große Zahl neuer im eigentlichen Sinne physikalischer Probleme hat es mit sich gebracht, daß den instrumentellen Fragen, besonders wenn diese sich auf der Physik ferner liegende Anwendungsgebiete erstrecken, geringeres Interesse entgegengebracht wird. Es ist daher dankbar zu begrüßen, wenn, wie im vorliegenden Buche geschehen, das Polarisationsmikroskop etwas eingehender behandelt wird und auch einige Probleme erörtert werden, die neuerdings in Verbindung mit der Konstitutionsforschung Bedeutung genommen haben.

Die Darstellung der Kristalloptik und der Grundtatsachen der Interferenz ist in jedem Lehrbuch der Kristalloptik im wesentlichen in gleicher Weise gegeben, dagegen dürften die Untersuchungsmethoden für die akzidentelle Doppelbrechung schon manchem etwas Neues bieten. Freilich findet man nur die allgemeinen Vorschriften und nur wenig über die besondere Ausführungsform und den durch sie bedingten Genauigkeitsgrad der Polarisationsmikroskope und ihrer Zusatzapparate (z. B. Kompensatoren), doch ist anzunehmen, daß der Physiker hier selbst Bescheid weiß. Von besonderem Wert ist Teil II, der die Doppelbrechungserscheinungen in dispersoiden Systemen umfaßt und sowohl auf die Theorie als auch auf die Versuchsergebnisse eingeht, wobei auch der Übergang zu den flüssigen Kristallen gestreift wird. Der letzte Abschnitt „Optische Untersuchungsmethoden zur Erschließung des submikroskopischen Feinbaues dispersoider Systeme" bezieht sich auf die Wirkung von mechanischen und elektrischen Richtkräften auf Flüssigkeiten und Sole und geht auf den optischen Nachweis chemischer und physikalischer Änderungen ein, sowie auf die Theorie der Färbungen. Durch ziemlich reichliche Quellenangabe ist dafür gesorgt, daß das Studium gewisser nur kurz behandelter Probleme möglich wird.

H. Schulz.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Göttingen Dr. Ludwig August Sommer für experimentelle Physik, Dr. Peter Adolf Thiessen für anorganische Chemie, Dr. Pasqual Jordan für theoretische Physik, an der Universität Königsberg Dr. Richard Brauer für Mathematik.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover Dr. Hermann Braune zum ord. Professor für physikalische Chemie und Elektrochemie ebenda, Dr. Arpad Kiss zum ord. Professor der Chemie an der Universität Szeged, der a. o. Professor an der Universität Heidelberg Dr. Max Trautz zum ord. Professor für physikalische Chemie ebenda, der a. o. Professor für organische Chemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Stefan Goldschmidt zum ord. Professor ebenda.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.